
7. Contrastes de Hipótesis

Curso 2011-2012
Estadística

Contraste de Hipótesis

Se ha realizado una encuesta a 400 personas elegidas al azar
Llamando p a la proporción de votantes del partido político A.
Podemos afirmar que $p > 0.5$.



Contraste de hipótesis

$$H_0 : p \leq 0.5$$

$$H_1 : p > 0.5$$



$$H_0 : p = 0.5$$

$$H_1 : p > 0.5$$

$$\hat{P} \rightarrow N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$$

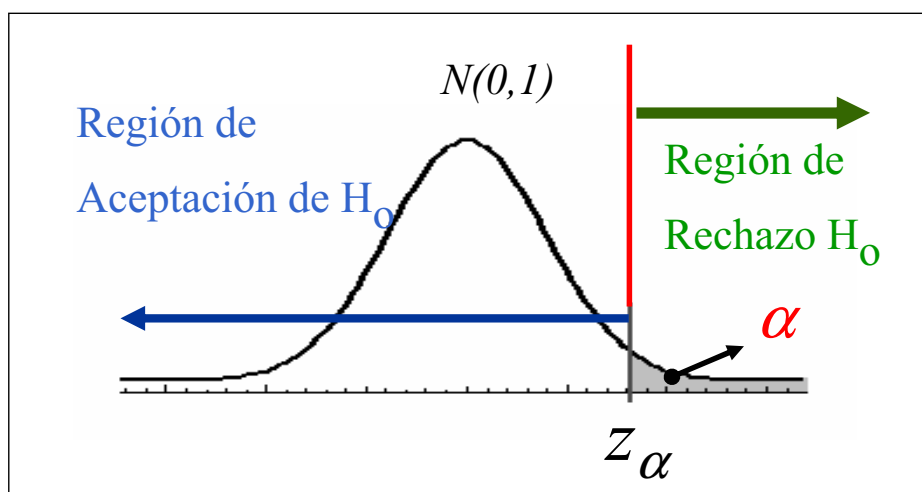
Si H_0 es cierto $p = 0.5$

$$\frac{\hat{P} - 0.5}{\sqrt{\frac{0.5 \times 0.5}{400}}} \rightarrow N(0,1)$$



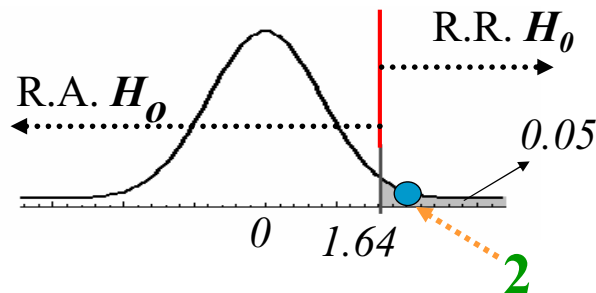
Nivel de significación α

$$\alpha = P(\text{rechazar } H_0 \mid H_0 \text{ es cierta})$$



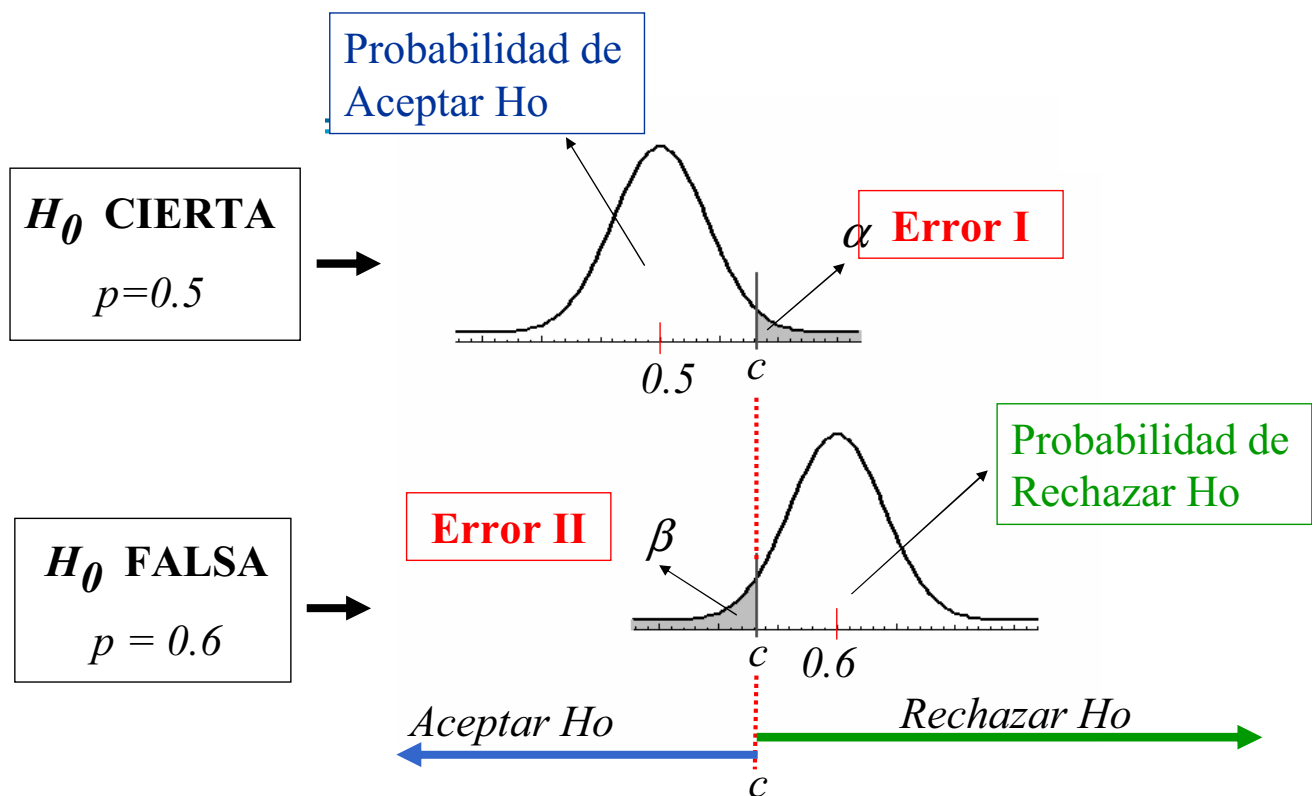
$$\text{Muestra } \hat{p} = 0.55 \Rightarrow z_0 = \frac{0.55 - 0.5}{\sqrt{\frac{0.5 \times 0.5}{400}}} = 2$$

Elegido el nivel de significación $\alpha = 0.05$



$$z_0 = 2 > z_\alpha = 1.64 \Rightarrow \text{Se rechaza } H_0$$

Con un nivel de significación de $\alpha = 0.05 \Rightarrow p > 0.5$



Tipos de errores

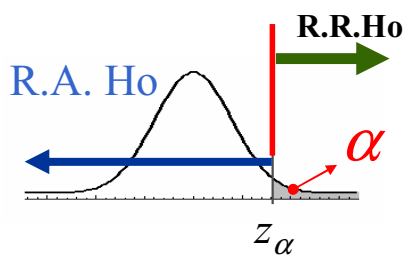
		RESULTADO CONTRASTE	
		Se Acepta H_0	Se Rechaza H_0
REALIDAD	H_0 CIERTA	Ok	Error tipo I α
	H_0 FALSA	Error tipo II β	Ok

Tipos de Contrastes

$$H_0 : p = 0.5$$

$$H_1 : p > 0.5$$

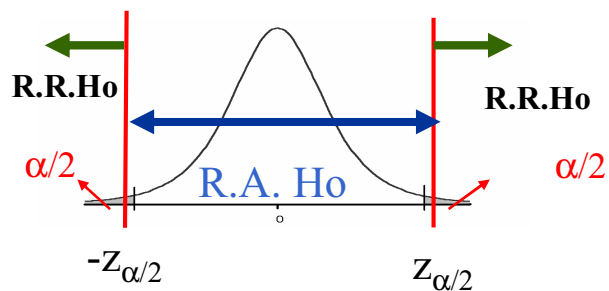
UNILATERAL



$$H_0 : p = 0.5$$

$$H_1 : p \neq 0.5$$

BILATERAL



Nivel de significación α

Nivel crítico o p -valor

$$H_0: p = p_0$$

$$H_1: p > p_0$$

$$\hat{P} \rightarrow N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$$

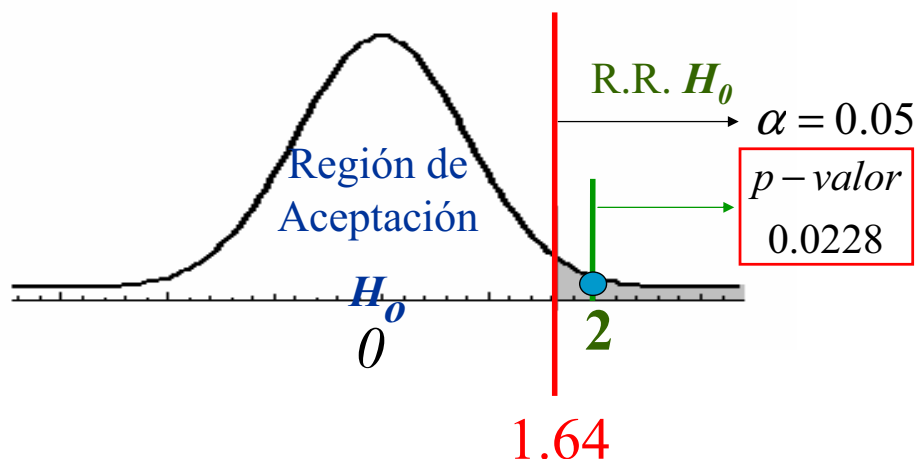
$$p\text{-valor} = \Pr(\hat{P} > \hat{p} \mid H_0 \text{ es cierto})$$

$$= \Pr\left(\frac{\hat{P} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}/n} > \frac{\hat{p} - p_0}{\sqrt{p_0(1-p_0)}/n}\right)$$

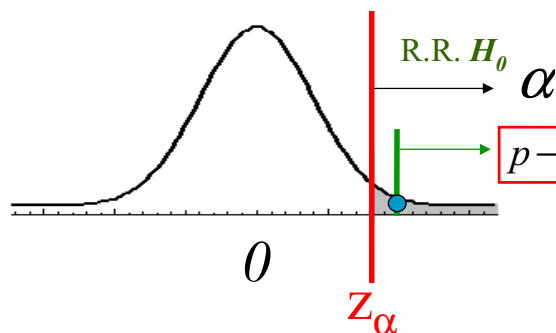
$$= \Pr(Z > z_0)$$

Ejemplo

Datos: $\hat{p} = \frac{220}{400} = 0.55$

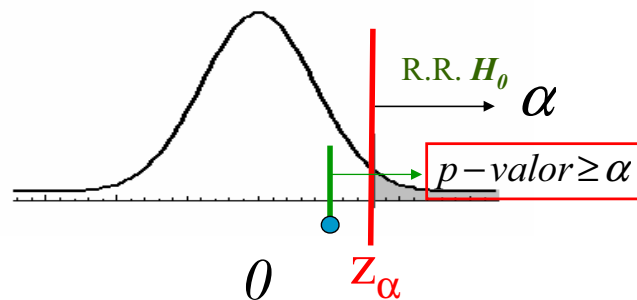


Relación entre *p*-valor y α



$p\text{-valor} < \alpha$
Se rechaza H_0

$p\text{-valor} \geq \alpha$
No se rechaza H_0



1. Normal: Contraste para μ con σ conocido

$$X_1, X_2, \dots, X_n \rightarrow N(\mu, \sigma)$$

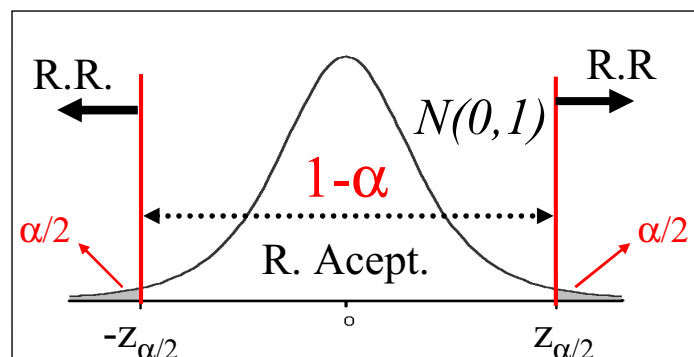
$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

$$\bar{X} \rightarrow N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \rightarrow N(0, 1)$$

$$z_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\sigma / \sqrt{n}} \rightarrow$$



$$|z_0| \leq z_{\alpha/2} \Rightarrow \text{No se rechaza } H_0$$

$$|z_0| > z_{\alpha/2} \Rightarrow \text{Se rechaza } H_0$$

2. Normal: Contraste para μ con σ desconocido

$$X_1, X_2, \dots, X_n \rightarrow N(\mu, \sigma)$$

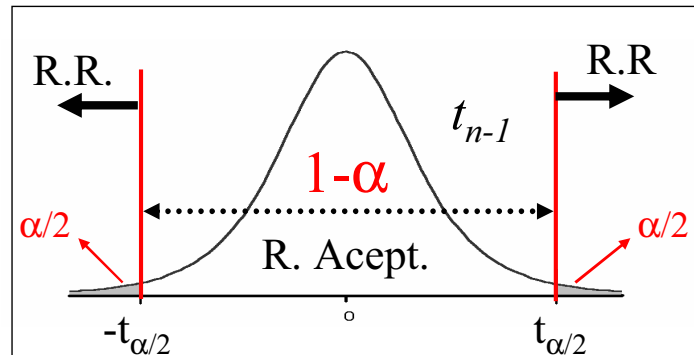
$$H_0: \mu = \mu_0$$

$$H_1: \mu \neq \mu_0$$

$$\bar{X} \rightarrow N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\hat{S} / \sqrt{n}} \rightarrow t_{n-1}$$

$$t_0 = \frac{\bar{x} - \mu_0}{\hat{s} / \sqrt{n}} \rightarrow$$



$$\begin{aligned} |t_0| \leq t_{\alpha/2} &\Rightarrow \text{No se rechaza } H_0 \\ |t_0| > t_{\alpha/2} &\Rightarrow \text{Se rechaza } H_0 \end{aligned}$$

3. Normal: Contraste para σ^2

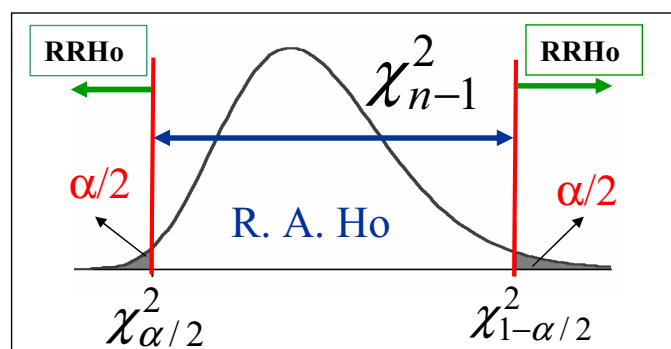
$$X_1, X_2, \dots, X_n \rightarrow N(\mu, \sigma)$$

$$H_0: \sigma^2 = \sigma_0^2$$

$$H_1: \sigma^2 \neq \sigma_0^2$$

$$\hat{S}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

$$\frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma_0^2} \rightarrow \chi_{n-1}^2 \rightarrow P(\chi_{\alpha/2}^2 \leq \chi_{n-1}^2 \leq \chi_{1-\alpha/2}^2) = 1 - \alpha$$



Datos: $\hat{s}^2$

$$\chi_0^2 = \frac{(n-1)\hat{s}^2}{\sigma_0^2} \rightarrow \begin{cases} \chi_0^2 \in [\chi_{\alpha/2}^2, \chi_{1-\alpha/2}^2] &\Rightarrow \text{No rechazo } H_0 \\ \chi_0^2 \notin [\chi_{\alpha/2}^2, \chi_{1-\alpha/2}^2] &\Rightarrow \text{Rechazo } H_0 \end{cases}$$

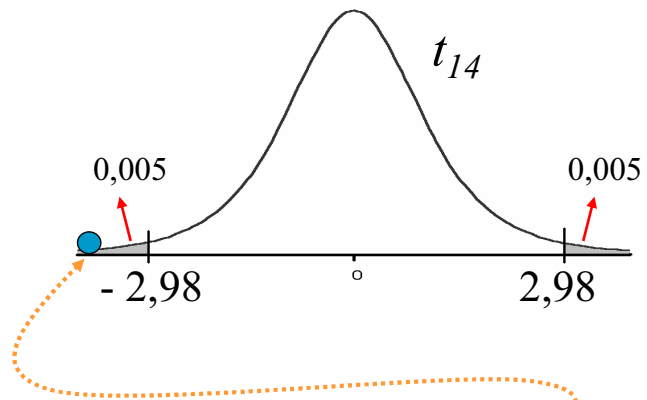
EJEMPLO 1. La resistencia a la compresión de 15 probetas de acero elegidas al azar es:

40,15	65,10	49,50	22,40	38,20
60,40	43,40	26,35	31,20	55,60
47,25	73,20	35,90	45,25	52,40

$$\left. \begin{array}{l} H_0 : \mu = 60 \\ H_1 : \mu \neq 60 \end{array} \right\} \alpha = 0.01$$

$$\frac{\bar{X} - \mu}{\hat{S} / \sqrt{15}} \rightarrow t_{14}$$

$$P(-2,98 \leq t_{14} \leq 2,98) = 0.99$$



Datos:

$$\bar{x} = 45,75 \quad \hat{s} = 14,2 \Rightarrow$$

$$t_0 = \frac{45,75 - 60}{14,2 / \sqrt{15}} = -3.88$$

Como $3.88 > 2.98 \Rightarrow$ Se rechaza H_0 con $\alpha=0.01$

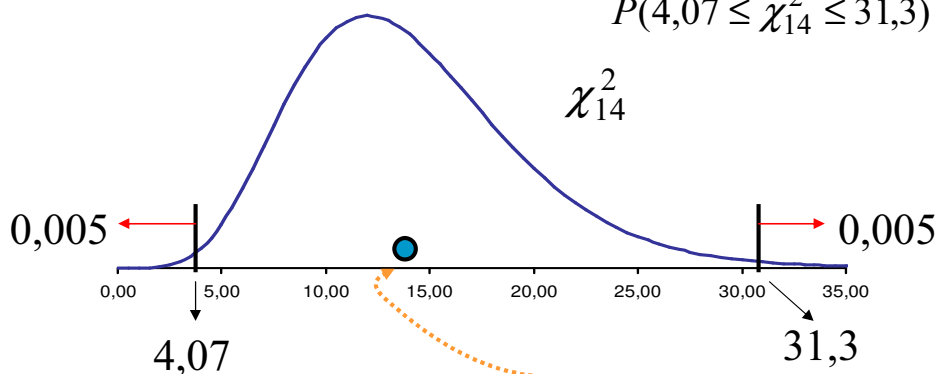
$$H_0 : \sigma^2 = 200$$

$$H_1 : \sigma^2 \neq 200$$

$$\frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2} \rightarrow \chi_{n-1}^2$$

$$\frac{14\hat{S}^2}{\sigma^2} \rightarrow \chi_{14}^2$$

$$P(4,07 \leq \chi_{14}^2 \leq 31,3) = 0,99$$



Datos:

$$\hat{s}^2 = 201,6 \longrightarrow \chi_0^2 = \frac{14 \times 201,6}{200} = 14.1$$

Como $4,07 \leq 14,1 \leq 31,3 \Rightarrow$ No se rechaza H_0

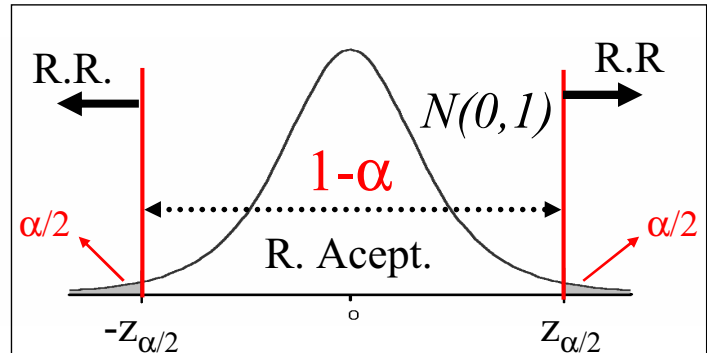
4. Poisson: Contraste para λ

$$X_1, X_2, \dots, X_n \rightarrow \text{Poisson}(\lambda) \quad \left. \begin{array}{l} H_0: \lambda = \lambda_0 \\ H_1: \lambda \neq \lambda_0 \end{array} \right\} \text{ nivel de significación } \alpha$$

$$\hat{\lambda} = \bar{X} \xrightarrow{\text{aprox}} N\left(\lambda, \sqrt{\frac{\lambda}{n}}\right)$$

$$Z = \frac{\hat{\lambda} - \lambda}{\sqrt{\frac{\lambda}{n}}} \rightarrow N(0,1)$$

$$P(-z_{\alpha/2} \leq Z \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$



$$z_0 = \frac{\hat{\lambda} - \lambda_0}{\sqrt{\frac{\lambda_0}{n}}}$$

$$\begin{array}{l} |z_0| \leq z_{\alpha/2} \Rightarrow \text{No se rechaza } H_0 \\ |z_0| > z_{\alpha/2} \Rightarrow \text{Se rechaza } H_0 \end{array}$$

Dos tratamientos

Comparación de dos tratamientos

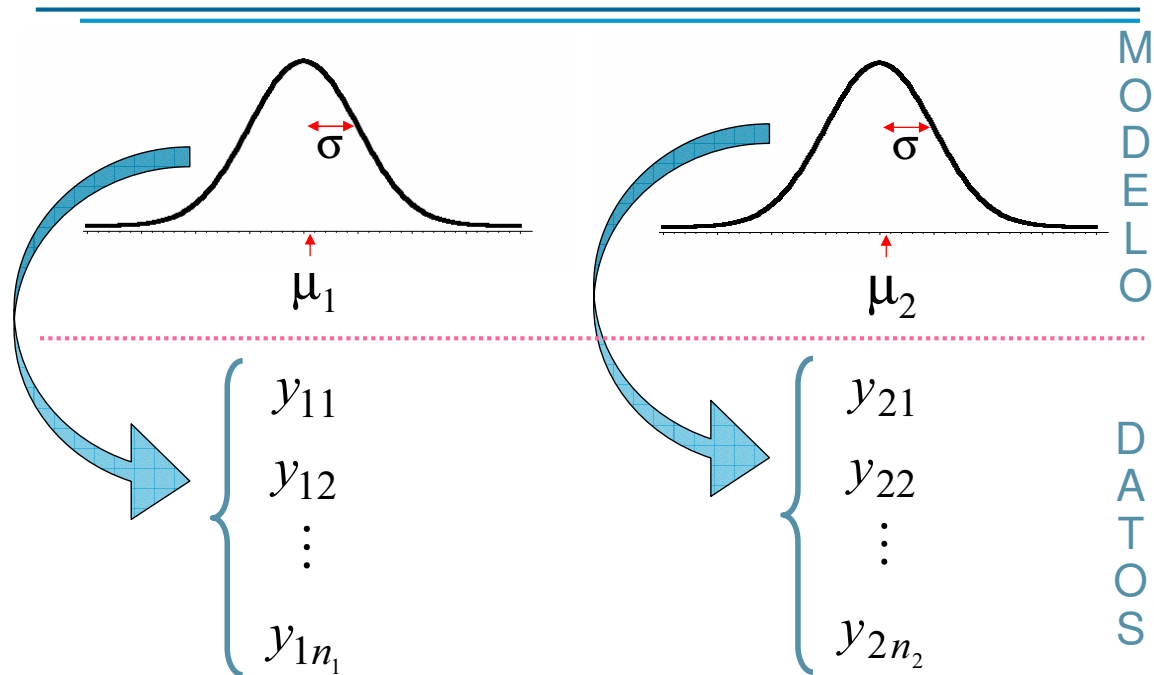
	A	B	
	51,3	29,6	
	39,4	47,0	
	26,3	25,9	
	39,0	13,0	
	48,1	33,1	
	34,2	22,1	
	69,8	34,1	
	31,3	19,5	
	45,2	43,8	
	46,4	24,9	

- Sea desea comparar dos tratamientos para reducir el nivel de colesterol en la sangre. Se seleccionan 20 individuos y se asignan al azar a dos tipos de dietas A y B. La tabla muestra la reducción conseguida después de dos meses.

Método: 4 pasos

- Definición del modelo de distribución de probabilidad:
 - ▲ Hipótesis
 - ▲ Parámetros
- Estimación de los parámetros
- Diagnóstico de las hipótesis
- Aplicación

Modelo



Modelo: Hipótesis y Parámetros

Hipótesis básicas:

- **Normalidad**

$$y_{ij} \Rightarrow N(\mu_i, \sigma^2)$$

- **Homocedasticidad**

$$\text{Var}[y_{ij}] = \sigma^2$$

- **Independencia**

$$\text{Cov}[y_{ij}, y_{kl}] = 0$$

Parámetros

$$\mu_1$$

$$\mu_2$$

$$\sigma^2$$

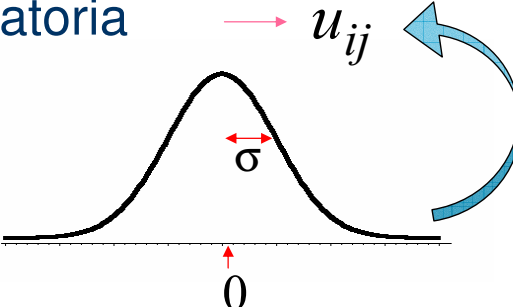
Modelo

$$y_{ij} = \mu_i + u_{ij}, \quad u_{ij} \rightarrow N(0, \sigma^2)$$

Las observaciones se descomponen en:

■ Parte predecible $\rightarrow \mu_i$

■ Parte aleatoria $\rightarrow u_{ij}$



Estimación medias:

$$\mu_1 : \rightarrow \bar{y}_{1\bullet} = \frac{\sum_{j=1}^{n_1} y_{1j}}{n_1}$$

$$\mu_2 : \rightarrow \bar{y}_{2\bullet} = \frac{\sum_{j=1}^{n_2} y_{2j}}{n_2}$$

	A	B	
	51,3	29,6	
	39,4	47,0	
	26,3	25,9	
	39,0	13,0	
	48,1	33,1	
	34,2	22,1	
	69,8	34,1	
	31,3	19,5	
	45,2	43,8	
	46,4	24,9	
	43,1	29,3	

Estimación varianza (residuos)

$$y_{ij} = \mu_i + u_{ij}, \quad u_{ij} \rightarrow N(0, \sigma^2)$$

$$u_{ij} = y_{ij} - \mu_i$$

$$e_{ij} = y_{ij} - \bar{y}_{i\bullet}$$

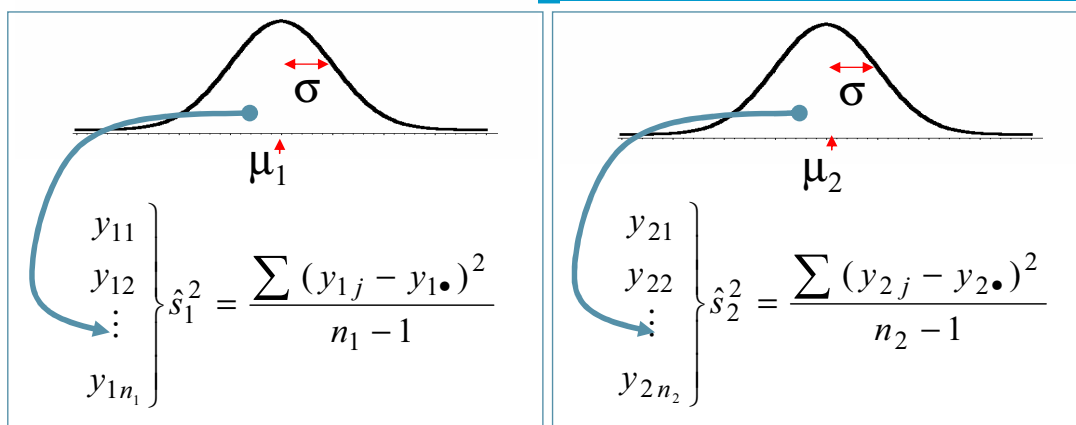
$$e_{ij} : \text{RESIDUO}$$

$$\sigma^2 : \rightarrow \hat{s}_R^2 = \frac{\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{n_i} e_{ij}^2}{n-2}$$

Residuos		
A	B	
8,2	0,3	
-3,7	17,7	
-16,8	-3,4	
-4,1	-16,3	
5,0	3,8	
-8,9	-7,2	
26,7	4,8	
-11,8	-9,8	
2,1	14,5	
3,3	-4,4	
0,0	0,0	

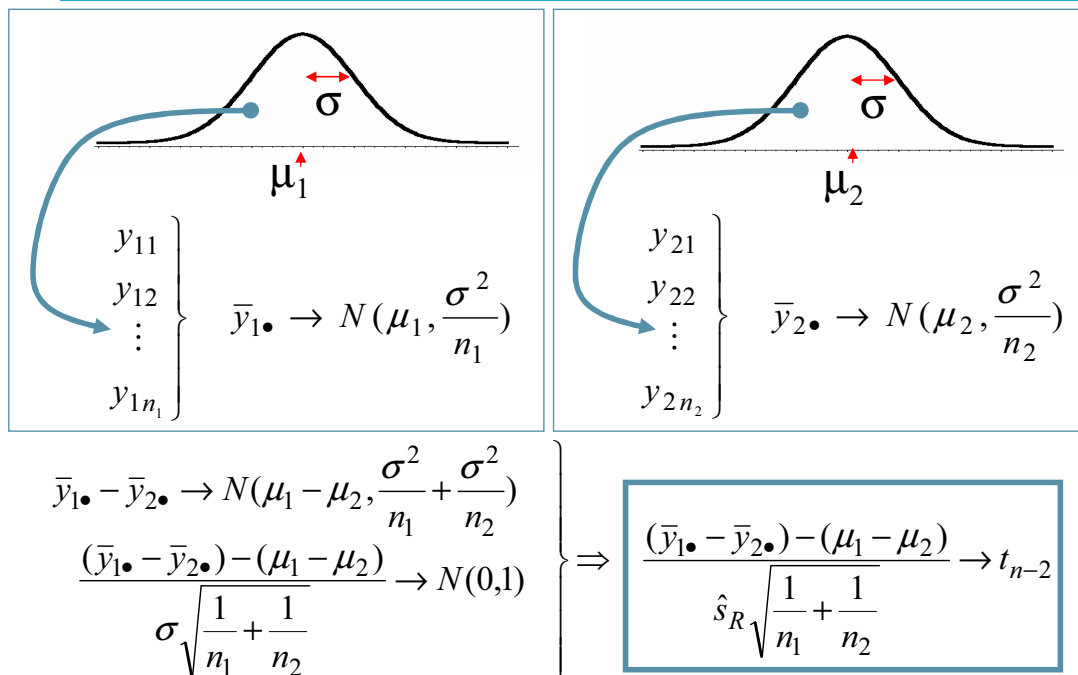
$$\sum_{j=1}^{n_i} e_{ij} = 0; \hat{s}_R^2 = 130.95$$

Varianza residual: $\hat{s}_R^2$



$$\hat{s}_R^2 = \frac{\sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^{n_i} e_{ij}^2}{n-2} = \frac{n_1-1}{n-1} \hat{s}_1^2 + \frac{n_2-1}{n-1} \hat{s}_2^2$$

Diferencia de medias: $\bar{y}_{1\bullet} - \bar{y}_{2\bullet}$

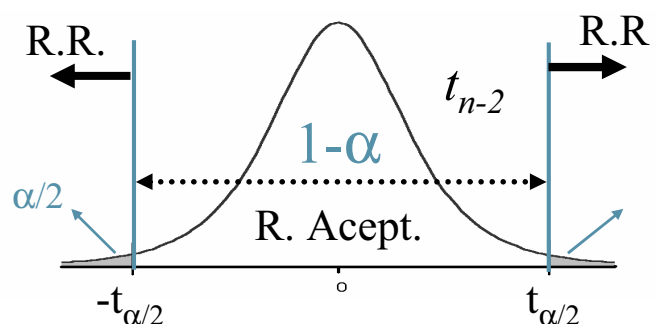


Contraste de igualdad de medias

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

$$t_0 = \frac{\bar{y}_{1\bullet} - \bar{y}_{2\bullet}}{\hat{s}_R \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \rightarrow t_{n-2}$$



$$|t_0| \leq t_{\alpha/2} \Rightarrow \text{No se rechaza } H_0$$

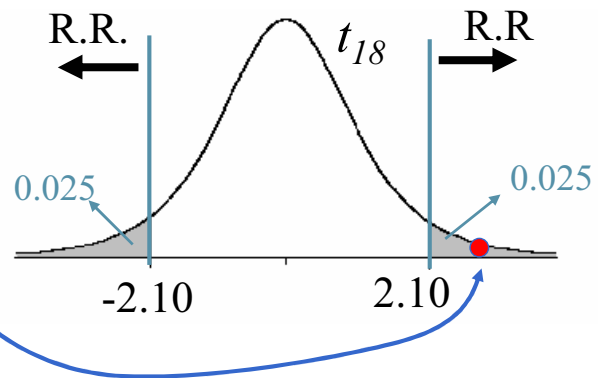
$$|t_0| > t_{\alpha/2} \Rightarrow \text{Se rechaza } H_0$$

Ejemplo: $\alpha = 0.05$

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

$$t_0 = \frac{43.1 - 29.3}{11.44 \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}}} = 2.69$$



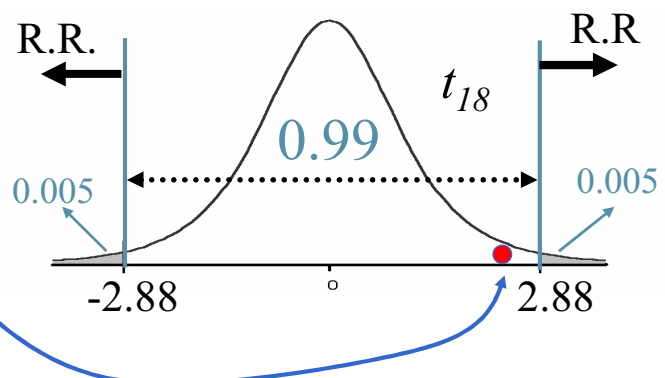
$2.69 > 2.10 \Rightarrow$ Se rechaza H_0

Ejemplo: $\alpha = 0.01$

$$H_0: \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$$

$$t_0 = \frac{43.1 - 29.3}{11.44 \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}}} = 2.69$$



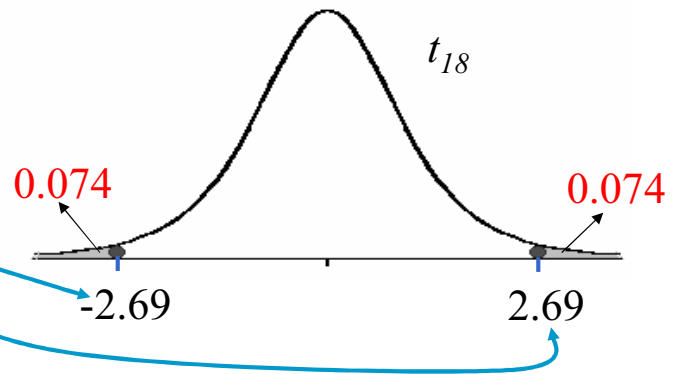
$2.69 \leq 2.88 \Rightarrow$ No se rechaza H_0

Nivel crítico (bilateral)

$$H_0 : \mu_1 = \mu_2$$

$$H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

$$t_0 = \frac{43.1 - 29.3}{11.44 \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}}} = 2.69$$



$$p\text{-valor} = \Pr(|t_{18}| > 2.69) = 0.0147$$

- $\alpha = 0.05 > p\text{-valor} \Rightarrow$ Se rechaza H_0
- $\alpha = 0.01 < p\text{-valor} \Rightarrow$ No se rechaza H_0

Conclusiones (fijado α)

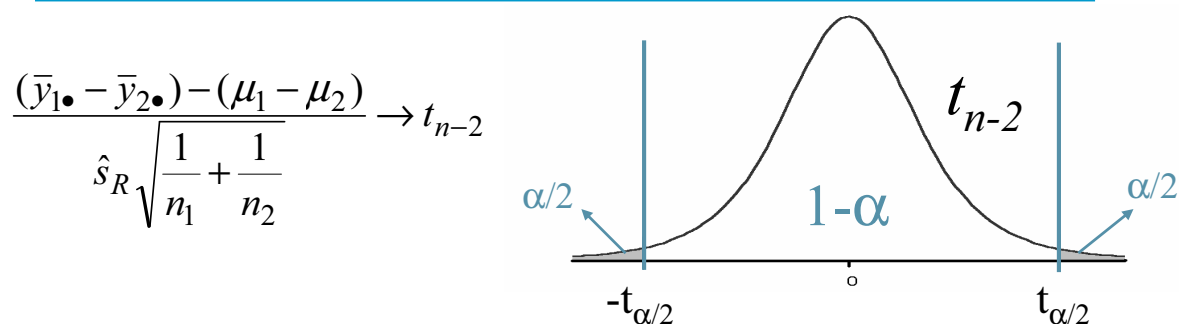
- Si $|t_0| > t_{\alpha/2}$ se dice que **la diferencia de medias es significativa**. O simplemente que los tratamientos son distintos (tienen medias distintas)
- Si $|t_0| \leq t_{\alpha/2}$ se dice que **la diferencia de medias no es significativa**. No hay evidencia suficiente para afirmar que las medias de los tratamientos sean diferentes.

No rechazar H_0 , no implica que H_0 sea cierta

- El resultado $|t_o| \leq t_{\alpha/2}$, (no se rechaza H_0) **no debe interpretarse** como que “*se ha demostrado que las dos medias son iguales*”.

No-rechazar la hipótesis nula implica que la diferencia entre las medias $\mu_1 - \mu_2$ no es lo suficientemente grande como para ser detectada con el tamaño muestral dado.

Intervalo de confianza para la diferencia de medias: $\mu_1 - \mu_2$

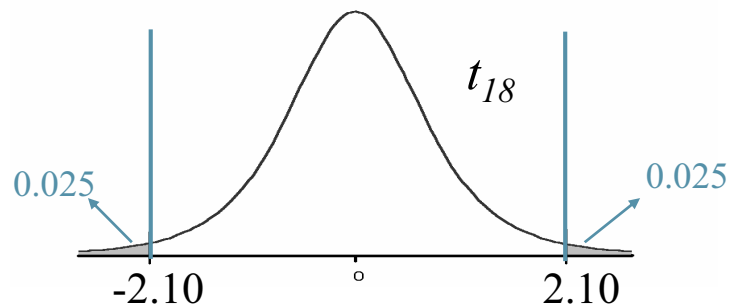


$$\frac{(\bar{y}_{1\bullet} - \bar{y}_{2\bullet}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\hat{s}_R \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \rightarrow t_{n-2}$$

$$\Pr \left\{ -t_{\alpha/2} \leq \frac{(\bar{y}_{1\bullet} - \bar{y}_{2\bullet}) - (\mu_1 - \mu_2)}{\hat{s}_R \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}} \leq t_{\alpha/2} \right\} = 1 - \alpha$$

$$\mu_1 - \mu_2 \in (\bar{y}_{1\bullet} - \bar{y}_{2\bullet}) \pm t_{\alpha/2} \hat{s}_R \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

Ejemplo: intervalo de confianza $\mu_1 - \mu_2$

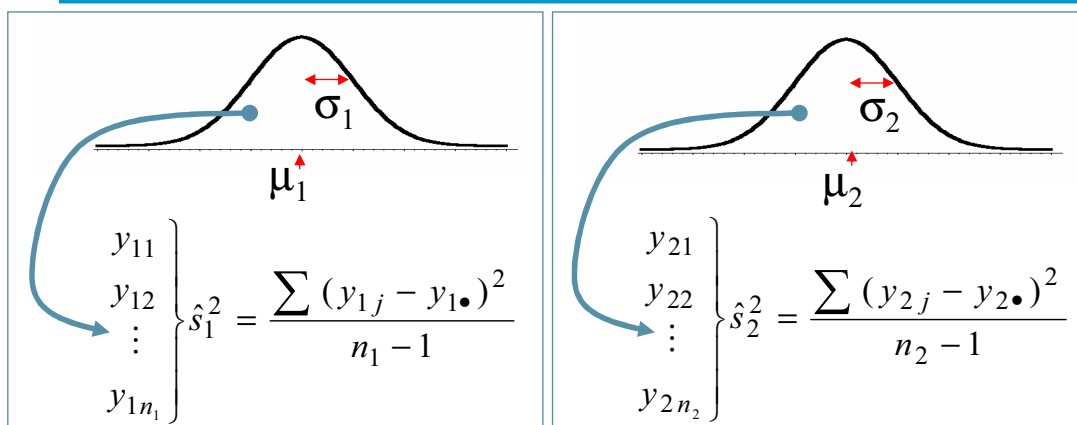


$$\mu_1 - \mu_2 \in (\bar{y}_{1\bullet} - \bar{y}_{2\bullet}) \pm t_{\alpha/2} \hat{s}_R \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

$$\mu_1 - \mu_2 \in (43.1 - 29.3) \pm 2.10 \times 11.44 \times \sqrt{\frac{1}{10} + \frac{1}{10}}$$

$$\mu_1 - \mu_2 \in 13.8 \pm 10.74$$

Hipótesis de homocedasticidad



$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

Distribución F

$$\left. \begin{matrix} y_{11} \\ y_{12} \\ \vdots \\ y_{1n_1} \end{matrix} \right\} \hat{s}_1^2 = \frac{\sum (y_{1j} - y_{1\bullet})^2}{n_1 - 1}$$

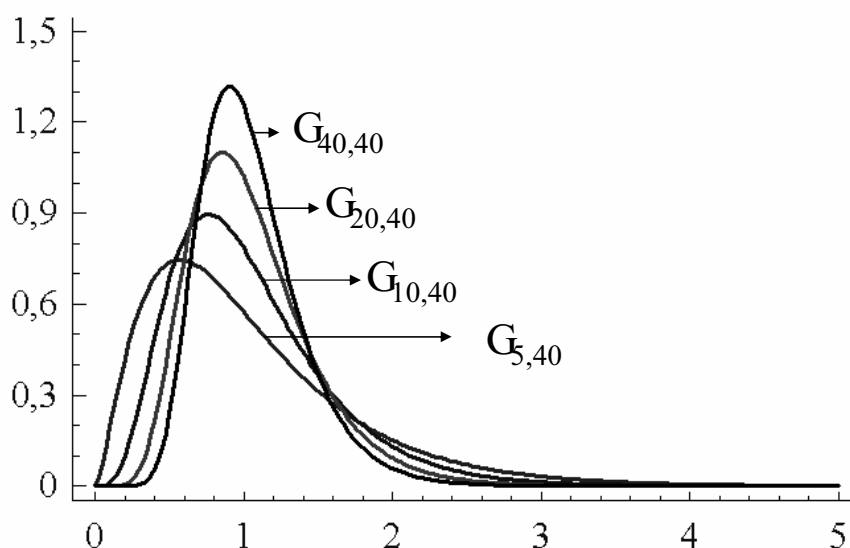
$$\left. \begin{matrix} y_{21} \\ y_{22} \\ \vdots \\ y_{2n_2} \end{matrix} \right\} \hat{s}_2^2 = \frac{\sum (y_{2j} - y_{2\bullet})^2}{n_2 - 1}$$

$$\frac{(n_1 - 1)\hat{s}_1^2}{\sigma_1^2} \rightarrow \chi_{n_1-1}^2$$

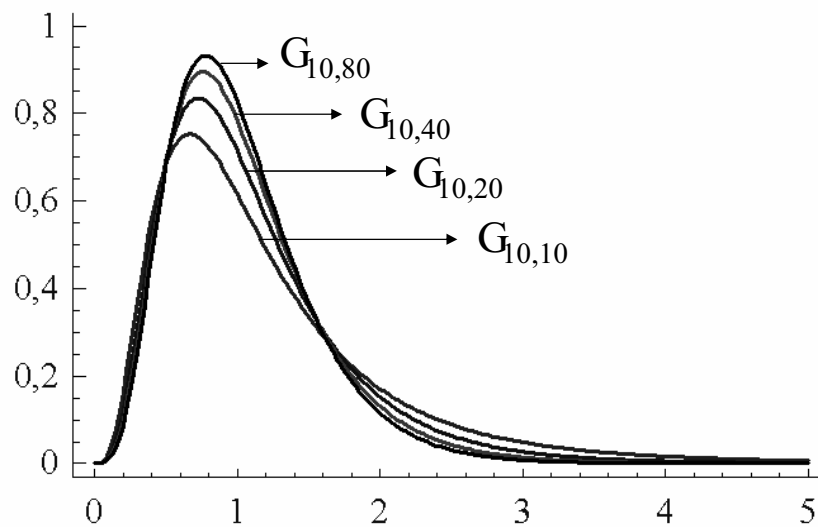
$$\frac{(n_2 - 1)\hat{s}_2^2}{\sigma_2^2} \rightarrow \chi_{n_2-1}^2$$

$$F = \frac{\chi_{n_1-1}^2 / (n_1 - 1)}{\chi_{n_2-1}^2 / (n_2 - 1)} = \frac{\hat{s}_1^2 / \sigma_1^2}{\hat{s}_2^2 / \sigma_2^2} \rightarrow F_{n_1-1, n_2-1}$$

Distribución F



Algunas distribuciones F



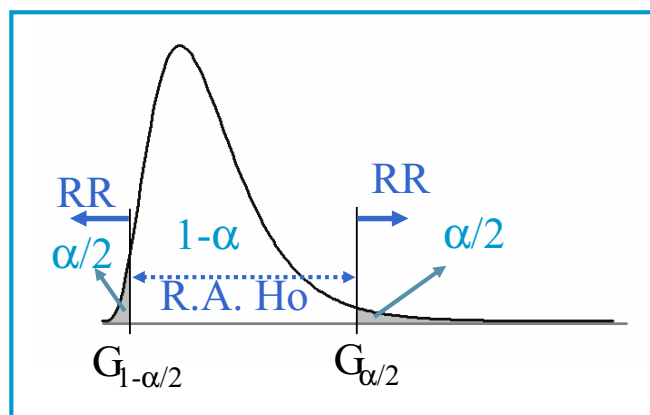
Contraste de igualdad de varianzas

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

Si H_0 es cierto $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$,

$$F_0 = \frac{\hat{s}_1^2}{\hat{s}_2^2} \rightarrow F_{n_1-1, n_2-1}$$



Si $F_0 \in [F_{1-\alpha/2}, F_{\alpha/2}] \Rightarrow$ No se rechaza H_0

Si $F_0 \notin [F_{1-\alpha/2}, F_{\alpha/2}] \Rightarrow$ Se rechaza H_0

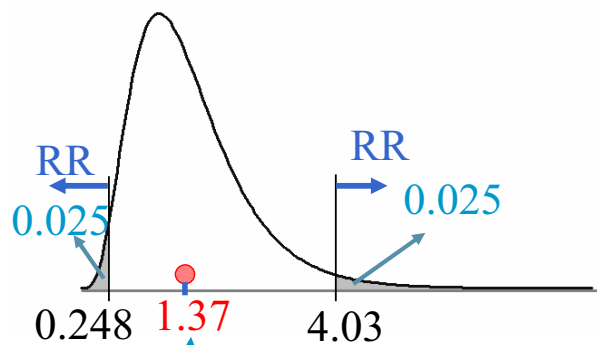
Ejemplo: Contraste de igualdad de varianzas

$$H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$$

$$H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_2^2$$

$$\hat{s}_1^2 = 154.02 \quad \hat{s}_2^2 = 111.7$$

$$F_0 = \frac{154.02}{111.7} = 1.37$$



$1.37 \in [0.248, 4.03] \Rightarrow$ No se rechaza H_0

Tabla G

$\alpha=0.05$

$$F_{v_1, v_2, \alpha} \Rightarrow P(F_{v_1, v_2} \geq F_{v_1, v_2, \alpha}) = \alpha$$

Grados de libertad del numerador: v_1

Grados de libertad del denominador: v_2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	100	120	Inf.	
1	161,4	199,5	215,7	224,6	230,2	234,0	236,8	238,9	240,5	241,9	243,9	245,9	248,0	249,1	250,1	251,1	252,2	253,0	253,3	254,3	1
2	18,51	19,00	19,16	19,25	19,30	19,33	19,35	19,37	19,38	19,40	19,41	19,43	19,45	19,45	19,46	19,47	19,48	19,49	19,49	19,50	2
3	10,13	9,55	9,28	9,12	9,01	8,94	8,89	8,85	8,81	8,79	8,74	8,70	8,66	8,64	8,62	8,59	8,57	8,55	8,55	8,53	3
4	7,71	6,94	6,59	6,39	6,26	6,16	6,09	6,04	6,00	5,96	5,91	5,86	5,80	5,77	5,75	5,72	5,69	5,66	5,66	5,63	4
5	6,61	5,79	5,41	5,19	5,05	4,95	4,88	4,82	4,77	4,74	4,68	4,62	4,56	4,53	4,50	4,46	4,43	4,41	4,40	4,37	5
6	5,99	5,14	4,76	4,53	4,39	4,28	4,21	4,15	4,10	4,06	4,00	3,94	3,87	3,84	3,81	3,77	3,74	3,71	3,70	3,67	6
7	5,59	4,74	4,35	4,12	3,97	3,87	3,79	3,73	3,68	3,64	3,57	3,51	3,44	3,41	3,38	3,34	3,30	3,27	3,27	3,23	7
8	5,32	4,46	4,07	3,84	3,69	3,58	3,50	3,44	3,39	3,35	3,28	3,22	3,15	3,12	3,08	3,04	3,01	2,97	2,97	2,93	8
9	5,12	4,26	3,86	3,63	3,48	3,37	3,29	3,23	3,18	3,14	3,07	3,01	2,94	2,90	2,86	2,83	2,79	2,76	2,75	2,71	9
10	4,96	4,10	3,71	3,48	3,33	3,22	3,14	3,07	3,02	2,98	2,91	2,85	2,77	2,74	2,70	2,66	2,62	2,59	2,58	2,54	10
11	4,84	3,98	3,59	3,36	3,20	3,09	3,01	2,95	2,90	2,85	2,79	2,72	2,65	2,61	2,57	2,53	2,49	2,46	2,45	2,40	11
12	4,75	3,89	3,49	3,26	3,11	3,00	2,91	2,85	2,80	2,75	2,69	2,62	2,54	2,51	2,47	2,43	2,38	2,35	2,34	2,30	12
13	4,67	3,81	3,41	3,18	3,03	2,92	2,83	2,77	2,71	2,67	2,60	2,53	2,46	2,42	2,38	2,34	2,30	2,26	2,25	2,21	13
14	4,60	3,74	3,34	3,11	2,96	2,85	2,76	2,70	2,65	2,60	2,53	2,46	2,39	2,35	2,31	2,27	2,22	2,19	2,18	2,13	14
15	4,54	3,68	3,29	3,06	2,90	2,79	2,71	2,64	2,59	2,54	2,48	2,40	2,33	2,29	2,25	2,20	2,16	2,12	2,11	2,07	15
16	4,49	3,63	3,24	3,01	2,85	2,74	2,66	2,59	2,54	2,49	2,42	2,35	2,28	2,24	2,19	2,15	2,11	2,07	2,06	2,01	16
17	4,45	3,59	3,20	2,96	2,81	2,70	2,61	2,55	2,49	2,45	2,38	2,31	2,23	2,19	2,15	2,10	2,06	2,02	2,01	1,96	17
18	4,41	3,55	3,16	2,93	2,77	2,66	2,58	2,51	2,46	2,41	2,34	2,27	2,19	2,15	2,11	2,06	2,02	1,98	1,97	1,92	18
19	4,38	3,52	3,13	2,90	2,74	2,63	2,54	2,48	2,42	2,38	2,31	2,23	2,16	2,11	2,07	2,03	1,98	1,94	1,93	1,88	19
20	4,35	3,49	3,10	2,87	2,71	2,60	2,51	2,45	2,39	2,35	2,28	2,20	2,12	2,08	2,04	1,99	1,95	1,91	1,90	1,84	20
21	4,32	3,47	3,07	2,84	2,68	2,57	2,49	2,42	2,37	2,32	2,25	2,18	2,10	2,05	2,01	1,96	1,92	1,88	1,87	1,81	21
22	4,30	3,44	3,05	2,82	2,66	2,55	2,46	2,40	2,34	2,30	2,23	2,15	2,07	2,03	1,98	1,94	1,89	1,85	1,84	1,78	22
23	4,28	3,42	3,03	2,80	2,64	2,53	2,44	2,37	2,32	2,27	2,20	2,13	2,05	2,01	1,96	1,91	1,86	1,82	1,81	1,76	23
24	4,26	3,40	3,01	2,78	2,62	2,51	2,42	2,36	2,30	2,25	2,18	2,11	2,03	1,98	1,94	1,89	1,84	1,80	1,79	1,73	24
25	4,24	3,39	2,99	2,76	2,60	2,49	2,40	2,34	2,28	2,24	2,16	2,09	2,01	1,96	1,92	1,87	1,82	1,78	1,77	1,71	25
26	4,23	3,37	2,98	2,74	2,59	2,47	2,39	2,32	2,27	2,22	2,15	2,07	1,99	1,95	1,90	1,85	1,80	1,76	1,75	1,69	26
27	4,21	3,35	2,96	2,73	2,57	2,46	2,37	2,31	2,25	2,20	2,13	2,06	1,97	1,93	1,88	1,84	1,79	1,74	1,73	1,67	27
28	4,20	3,34	2,95	2,71	2,56	2,45	2,36	2,29	2,24	2,19	2,12	2,04	1,96	1,91	1,87	1,82	1,77	1,73	1,71	1,65	28
29	4,18	3,33	2,93	2,70	2,55	2,43	2,35	2,28	2,22	2,18	2,10	2,03	1,94	1,90	1,85	1,81	1,75	1,71	1,70	1,64	29
30	4,17	3,32	2,92	2,69	2,53	2,42	2,33	2,27	2,21	2,16	2,09	2,01	1,93	1,89	1,84	1,79	1,74	1,70	1,68	1,62	30
40	4,08	3,23	2,84	2,61	2,45	2,34	2,25	2,18	2,12	2,08	2,00	1,92	1,84	1,79	1,74	1,69	1,64	1,59	1,58	1,51	40
50	4,03	3,18	2,79	2,56	2,40	2,29	2,20	2,13	2,07	2,03	1,95	1,87	1,78	1,74	1,69	1,63	1,58	1,52	1,51	1,44	50
60	4,00	3,15	2,76	2,53	2,37	2,25	2,17	2,10	2,04	1,99	1,92	1,84	1,75	1,70	1,65	1,59	1,53	1,48	1,47	1,39	60
70	3,98	3,13	2,74	2,50	2,35	2,23	2,14	2,07	2,02	1,97	1,89	1,81	1,72	1,67	1,62	1,57	1,50	1,45	1,44	1,35	70
80	3,96	3,11	2,72	2,49	2,33	2,21	2,13	2,06	2,00	1,95	1,88	1,79	1,70	1,65	1,60	1,54	1,48	1,43	1,41	1,32	80
90	3,95	3,10	2,71	2,47	2,32	2,20	2,11	2,04	1,99	1,94	1,86	1,78	1,69	1,64	1,59	1,53	1,46	1,41	1,39	1,30	90
100	3,94	3,09	2,70	2,46	2,31	2,19	2,10	2,03	1,97	1,93	1,85	1,77	1,68	1,63	1,57	1,52	1,45	1,39	1,38	1,28	100
120	3,92	3,07	2,68	2,45	2,29	2,18	2,09	2,02	1,96	1,91	1,83	1,75	1,66	1,61	1,55	1,50	1,43	1,37	1,35	1,25	120
Inf	3,84	3,00	2,60	2,37	2,21	2,10	2,01	1,94	1,88	1,83	1,75	1,67	1,57	1,52	1,46	1,39	1,32	1,24	1,22	1,00	Inf

Ejemplo: $P(F_{7,8} \geq 3.50) = 0.05$

Tabla G

$\alpha=0.025$

$$F_{v_1, v_2, \alpha} \Rightarrow P(F_{v_1, v_2} \geq F_{v_1, v_2, \alpha}) = \alpha$$

Grados de libertad del numerador: v_1

Grados de libertad del denominador: v_2

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	100	120	Inf.	
1	647,8	799,5	864,2	899,6	921,8	937,1	948,2	956,6	963,3	968,6	976,7	984,9	993,1	997,3	1001,4	1005,6	1009,8	1013,2	1014,0	1018,3	1
2	38,51	39,00	39,17	39,25	39,30	39,33	39,36	39,37	39,39	39,40	39,41	39,43	39,45	39,46	39,46	39,47	39,48	39,49	39,49	39,50	2
3	17,44	16,04	15,44	15,10	14,88	14,73	14,62	14,54	14,47	14,42	14,34	14,25	14,17	14,12	14,08	14,04	13,99	13,96	13,95	13,90	3
4	12,22	10,65	9,98	9,60	9,36	9,20	9,07	8,98	8,90	8,84	8,75	8,66	8,56	8,51	8,46	8,41	8,36	8,32	8,31	8,26	4
5	10,01	8,43	7,76	7,39	7,15	6,98	6,85	6,76	6,68	6,62	6,52	6,43	6,33	6,28	6,23	6,18	6,12	6,08	6,07	6,02	5
6	8,81	7,26	6,60	6,23	5,99	5,82	5,70	5,60	5,52	5,46	5,37	5,27	5,17	5,12	5,07	5,01	4,96	4,92	4,90	4,85	6
7	8,07	6,54	5,89	5,52	5,29	5,12	4,99	4,90	4,82	4,76	4,67	4,57	4,47	4,41	4,36	4,31	4,25	4,21	4,20	4,14	7
8	7,57	6,06	5,42	5,05	4,82	4,65	4,53	4,43	4,36	4,30	4,20	4,10	4,00	3,95	3,89	3,84	3,78	3,74	3,73	3,67	8
9	7,21	5,71	5,08	4,72	4,48	4,32	4,20	4,10	4,03	3,96	3,87	3,77	3,67	3,61	3,56	3,51	3,45	3,40	3,39	3,33	9
10	6,94	5,46	4,83	4,47	4,24	4,07	3,95	3,85	3,78	3,72	3,62	3,52	3,42	3,37	3,31	3,26	3,20	3,15	3,14	3,08	10
11	6,72	5,26	4,63	4,28	4,04	3,88	3,76	3,66	3,59	3,53	3,43	3,33	3,23	3,17	3,12	3,06	3,00	2,96	2,94	2,88	11
12	6,55	5,10	4,47	4,12	3,89	3,73	3,61	3,51	3,44	3,37	3,28	3,18	3,07	3,02	2,96	2,91	2,85	2,80	2,79	2,72	12
13	6,41	4,97	4,35	4,00	3,77	3,60	3,48	3,39	3,31	3,25	3,15	3,05	2,95	2,89	2,84	2,78	2,72	2,67	2,66	2,60	13
14	6,30	4,86	4,24	3,89	3,66	3,50	3,38	3,29	3,21	3,15	3,05	2,95	2,84	2,79	2,73	2,67	2,61	2,56	2,55	2,49	14
15	6,20	4,77	4,15	3,80	3,58	3,41	3,29	3,20	3,12	3,06	2,96	2,86	2,76	2,70	2,64	2,59	2,52	2,47	2,46	2,40	15
16	6,12	4,69	4,08	3,73	3,50	3,34	3,22	3,12	3,05	2,99	2,89	2,79	2,68	2,63	2,57	2,51	2,45	2,40	2,38	2,32	16
17	6,04	4,62	4,01	3,66	3,44	3,28	3,16	3,06	2,98	2,92	2,82	2,72	2,62	2,56	2,50	2,44	2,38	2,33	2,32	2,25	17
18	5,98	4,56	3,95	3,61	3,38	3,22	3,10	3,01	2,93	2,87	2,77	2,67	2,56	2,50	2,44	2,38	2,32	2,27	2,26	2,19	18
19	5,92	4,51	3,90	3,56	3,33	3,17	3,05	2,96	2,88	2,82	2,72	2,62	2,51	2,45	2,39	2,33	2,27	2,22	2,20	2,13	19
20	5,87	4,46	3,86	3,51	3,29	3,13	3,01	2,91	2,84	2,77	2,68	2,57	2,46	2,41	2,35	2,29	2,22	2,17	2,16	2,09	20
21	5,83	4,42	3,82	3,48	3,25	3,09	2,97	2,87	2,80	2,73	2,64	2,53	2,42	2,37	2,31	2,25	2,18	2,13	2,11	2,04	21
22	5,79	4,38	3,78	3,44	3,22	3,05	2,93	2,84	2,76	2,70	2,60	2,50	2,39	2,33	2,27	2,21	2,14	2,09	2,08	2,00	22
23	5,75	4,35	3,75	3,41	3,18	3,02	2,90	2,81	2,73	2,67	2,57	2,47	2,36	2,30	2,24	2,18	2,11	2,06	2,04	1,97	23
24	5,72	4,32	3,72	3,38	3,15	2,99	2,87	2,78	2,70	2,64	2,54	2,44	2,33	2,27	2,21	2,15	2,08	2,02	2,01	1,94	24
25	5,69	4,29	3,69	3,35	3,13	2,97	2,85	2,75	2,68	2,61	2,51	2,41	2,30	2,24	2,18	2,12	2,05	2,00	1,98	1,91	25
26	5,66	4,27	3,67	3,33	3,10	2,94	2,82	2,73	2,65	2,59	2,49	2,39	2,28	2,22	2,16	2,09	2,03	1,97	1,95	1,88	26
27	5,63	4,24	3,65	3,31	3,08	2,92	2,80	2,71	2,63	2,57	2,47	2,36	2,25	2,19	2,13	2,07	2,00	1,94	1,93	1,85	27
28	5,61	4,22	3,63	3,29	3,06	2,90	2,78	2,69	2,61	2,55	2,45	2,34	2,23	2,17	2,11	2,05	1,98	1,92	1,91	1,83	28
29	5,59	4,20	3,61	3,27	3,04	2,88	2,76	2,67	2,59	2,53	2,43	2,32	2,21	2,15	2,09	2,03	1,96	1,90	1,89	1,81	29
30	5,57	4,18	3,59	3,25	3,03	2,87	2,75	2,65	2,57	2,51	2,41	2,31	2,20	2,14	2,07	2,01	1,94	1,88	1,87	1,79	30
40	5,42	4,05	3,46	3,13	2,90	2,74	2,62	2,53	2,45	2,39	2,29	2,18	2,07	2,01	1,94	1,88	1,80	1,74	1,72	1,64	40
50	5,34	3,97	3,39	3,05	2,83	2,67	2,55	2,46	2,38	2,32	2,22	2,11	1,99	1,93	1,87	1,80	1,72	1,66	1,64	1,55	50
60	5,29	3,93	3,34	3,01	2,79	2,63	2,51	2,41	2,33	2,27	2,17	2,06	1,94	1,88	1,82	1,74	1,67	1,60	1,58	1,48	60
70	5,25	3,89	3,31	2,97	2,75	2,59	2,47	2,38	2,30	2,24	2,14	2,03	1,91	1,85	1,78	1,71	1,63	1,56	1,54	1,44	70
80	5,22	3,86	3,28	2,95	2,73	2,57	2,45	2,35	2,28	2,21	2,11	2,00	1,88	1,82	1,75	1,68	1,60	1,53	1,51	1,40	80
90	5,20	3,84	3,26	2,93	2,71	2,55	2,43	2,34	2,26	2,19	2,09	1,98	1,86	1,80	1,73	1,66	1,58	1,50	1,48	1,37	90
100	5,18	3,83	3,25	2,92	2,70	2,54	2,42	2,32	2,24	2,18	2,08	1,97	1,85	1,78	1,71	1,64	1,56	1,48	1,46	1,35	100
120	5,15	3,80	3,23	2,89	2,67	2,52	2,39	2,30	2,22	2,16	2,05	1,94	1,82	1,76	1,69	1,61	1,53	1,45	1,43	1,31	120
Inf	5,02	3,69	3,12	2,79	2,57	2,41	2,29	2,19	2,11	2,05	1,94	1,83	1,71	1,64	1,57	1,48	1,39	1,30	1,27	1,00	Inf
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	100	120	Inf.	

Ejemplo: $P(F_{7,8} \geq 4.53) = 0.025$

Tabla G

$\alpha=0.01$

$$F_{v_1, v_2, \alpha} \Rightarrow P(F_{v_1, v_2} \geq F_{v_1, v_2, \alpha}) = \alpha$$

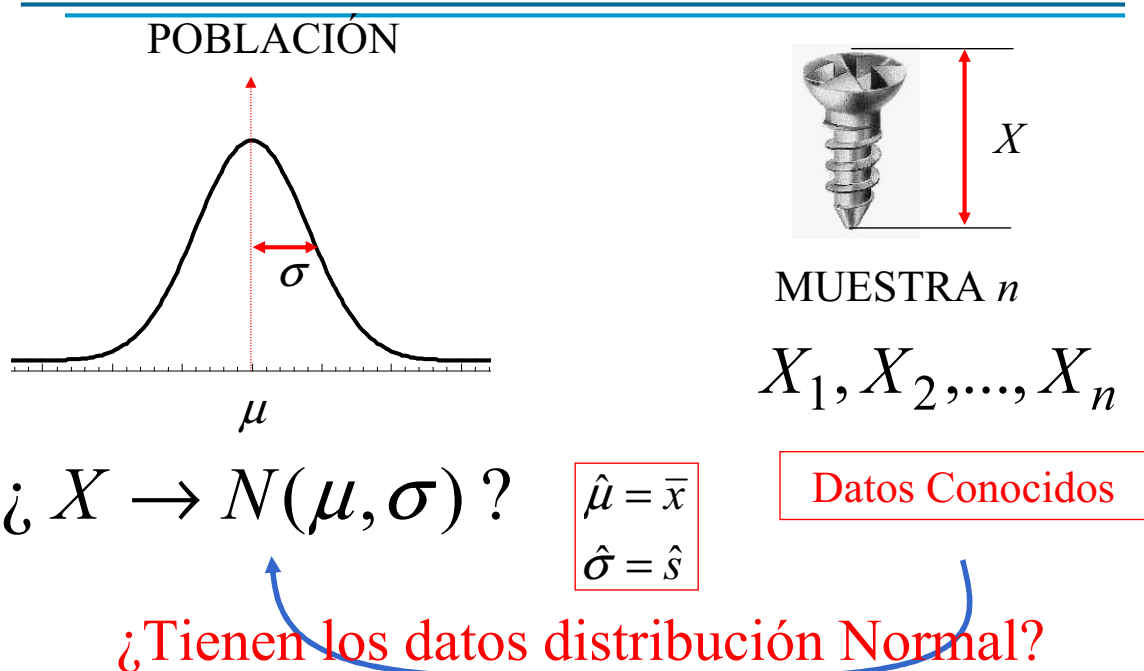
Grados de libertad del numerador: v_1

Grados de libertad del denominador: v_2

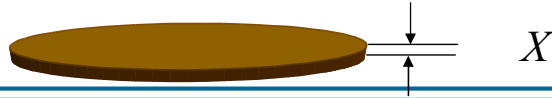
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	100	120	Inf.	
1	4052.2	4999.3	5403.5	5624.3	5764.0	5859.0	5928.3	5981.0	6022.4	6055.9	6106.7	6157.0	6208.7	6234.3	6260.4	6286.4	6313.0	6333.9	6339.5	6365.6	1
2	98.50	99.00	99.16	99.25	99.30	99.33	99.36	99.38	99.39	99.40	99.42	99.43	99.45	99.46	99.47	99.48	99.48	99.49	99.49	99.50	2
3	34.12	30.82	29.46	28.71	28.24	27.91	27.67	27.49	27.34	27.23	27.05	26.87	26.69	26.60	26.50	26.41	26.32	26.24	26.22	26.13	3
4	21.20	18.00	16.69	15.98	15.52	15.21	14.98	14.80	14.66	14.55	14.37	14.20	14.02	13.93	13.84	13.75	13.65	13.58	13.56	13.46	4
5	16.26	13.27	12.06	11.39	10.97	10.67	10.46	10.29	10.16	10.05	9.89	9.72	9.55	9.47	9.38	9.29	9.20	9.13	9.11	9.02	5
6	13.75	10.92	9.78	9.15	8.75	8.47	8.26	8.10	7.98	7.87	7.72	7.56	7.40	7.31	7.23	7.14	7.06	6.99	6.97	6.88	6
7	12.25	9.55	8.45	7.85	7.46	7.19	6.99	6.84	6.72	6.62	6.47	6.31	6.16	6.07	5.99	5.91	5.82	5.75	5.74	5.65	7
8	11.26	8.65	7.59	7.01	6.63	6.37	6.18	6.03	5.91	5.81	5.67	5.52	5.36	5.28	5.20	5.12	5.03	4.96	4.95	4.86	8
9	10.56	8.02	6.99	6.42	6.06	5.80	5.61	5.47	5.35	5.26	5.11	4.96	4.81	4.73	4.65	4.57	4.48	4.41	4.40	4.31	9
10	10.04	7.56	6.55	5.99	5.64	5.39	5.20	5.06	4.94	4.85	4.71	4.56	4.41	4.33	4.25	4.17	4.08	4.01	4.00	3.91	10
11	9.65	7.21	6.22	5.67	5.32	5.07	4.89	4.74	4.63	4.54	4.40	4.25	4.10	4.02	3.94	3.86	3.78	3.71	3.69	3.60	11
12	9.33	6.93	5.95	5.41	5.06	4.82	4.64	4.50	4.39	4.30	4.16	4.01	3.86	3.78	3.70	3.62	3.54	3.47	3.45	3.36	12
13	9.07	6.70	5.74	5.21	4.86	4.62	4.44	4.30	4.19	4.10	3.96	3.82	3.66	3.59	3.51	3.43	3.34	3.27	3.25	3.17	13
14	8.86	6.51	5.56	5.04	4.69	4.46	4.28	4.14	4.03	3.94	3.80	3.66	3.51	3.43	3.35	3.27	3.18	3.11	3.09	3.00	14
15	8.68	6.36	5.42	4.89	4.56	4.32	4.14	4.00	3.89	3.80	3.67	3.52	3.37	3.29	3.21	3.13	3.05	2.98	2.96	2.87	15
16	8.53	6.23	5.29	4.77	4.44	4.20	4.03	3.89	3.78	3.69	3.55	3.41	3.26	3.18	3.10	3.02	2.93	2.86	2.84	2.75	16
17	8.40	6.11	5.19	4.67	4.34	4.10	3.93	3.79	3.68	3.59	3.46	3.31	3.16	3.08	3.00	2.92	2.83	2.76	2.75	2.65	17
18	8.29	6.01	5.09	4.58	4.25	4.01	3.84	3.71	3.60	3.51	3.37	3.23	3.08	3.00	2.92	2.84	2.75	2.68	2.66	2.57	18
19	8.18	5.93	5.01	4.50	4.17	3.94	3.77	3.63	3.52	3.43	3.30	3.15	3.00	2.92	2.84	2.76	2.67	2.60	2.58	2.49	19
20	8.10	5.85	4.94	4.43	4.10	3.87	3.70	3.56	3.46	3.37	3.23	3.09	2.94	2.86	2.78	2.69	2.61	2.54	2.52	2.42	20
21	8.02	5.78	4.87	4.37	4.04	3.81	3.64	3.51	3.40	3.31	3.17	3.03	2.88	2.80	2.72	2.64	2.55	2.48	2.46	2.36	21
22	7.95	5.72	4.82	4.31	3.99	3.76	3.59	3.45	3.35	3.26	3.12	2.98	2.83	2.75	2.67	2.58	2.50	2.42	2.40	2.31	22
23	7.88	5.66	4.76	4.26	3.94	3.71	3.54	3.41	3.30	3.21	3.07	2.93	2.78	2.70	2.62	2.54	2.45	2.37	2.35	2.26	23
24	7.82	5.61	4.72	4.22	3.90	3.67	3.50	3.36	3.26	3.17	3.03	2.89	2.74	2.66	2.58	2.49	2.40	2.33	2.31	2.21	24
25	7.77	5.57	4.68	4.18	3.85	3.63	3.46	3.32	3.22	3.13	2.99	2.85	2.70	2.62	2.54	2.45	2.36	2.29	2.27	2.17	25
26	7.72	5.53	4.64	4.14	3.82	3.59	3.42	3.29	3.18	3.09	2.96	2.81	2.66	2.58	2.50	2.42	2.33	2.25	2.23	2.13	26
27	7.68	5.49	4.60	4.11	3.78	3.56	3.39	3.26	3.15	3.06	2.93	2.78	2.63	2.55	2.47	2.38	2.29	2.22	2.20	2.10	27
28	7.64	5.45	4.57	4.07	3.75	3.53	3.36	3.23	3.12	3.03	2.90	2.75	2.60	2.52	2.44	2.35	2.26	2.19	2.17	2.06	28
29	7.60	5.42	4.54	4.04	3.73	3.50	3.33	3.20	3.09	3.00	2.87	2.73	2.57	2.49	2.41	2.33	2.23	2.16	2.14	2.03	29
30	7.56	5.39	4.51	4.02	3.70	3.47	3.30	3.17	3.07	2.98	2.84	2.70	2.55	2.47	2.39	2.30	2.21	2.13	2.11	2.01	30
40	7.31	5.18	4.31	3.83	3.51	3.29	3.12	2.99	2.89	2.80	2.66	2.52	2.37	2.29	2.20	2.11	2.02	1.94	1.92	1.80	40
50	7.17	5.06	4.20	3.72	3.41	3.19	3.02	2.89	2.78	2.70	2.56	2.42	2.27	2.18	2.10	2.01	1.91	1.82	1.80	1.68	50
60	7.08	4.98	4.13	3.65	3.34	3.12	2.95	2.82	2.72	2.63	2.50	2.35	2.20	2.12	2.03	1.94	1.84	1.75	1.73	1.60	60
70	7.01	4.92	4.07	3.60	3.29	3.07	2.91	2.78	2.67	2.59	2.45	2.31	2.15	2.07	1.98	1.89	1.78	1.70	1.67	1.54	70
80	6.96	4.88	4.04	3.56	3.26	3.04	2.87	2.74	2.64	2.55	2.42	2.27	2.12	2.03	1.94	1.85	1.75	1.65	1.63	1.49	80
90	6.93	4.85	4.01	3.53	3.23	3.01	2.84	2.72	2.61	2.52	2.39	2.24	2.09	2.00	1.92	1.82	1.72	1.62	1.60	1.46	90
100	6.90	4.82	3.98	3.51	3.21	2.99	2.82	2.69	2.59	2.50	2.37	2.22	2.07	1.98	1.89	1.80	1.69	1.60	1.57	1.43	100
120	6.85	4.79	3.95	3.48	3.17	2.96	2.79	2.66	2.56	2.47	2.34	2.19	2.03	1.95	1.86	1.76	1.66	1.56	1.53	1.38	120
Inf	6.63	4.61	3.78	3.32	3.02	2.80	2.64	2.51	2.41	2.32	2.18	2.04	1.88	1.79	1.70	1.59	1.47	1.36	1.32	1.00	Inf
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	12	15	20	24	30	40	60	100	120	Inf.	

Contrastes de bondad de ajuste

Contraste χ^2 de bondad de ajuste

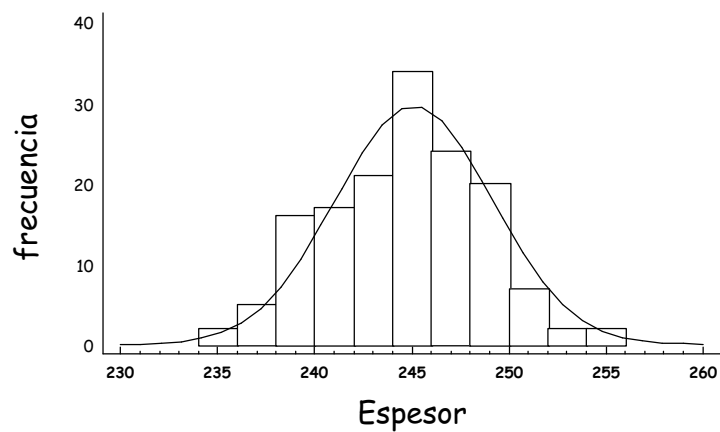


Espesores de 150 obleas de Silicio (micras)



240	235	240	240	247	237	243	242	236	239
243	237	243	242	245	239	245	245	239	240
250	246	244	246	255	242	248	248	241	242
253	249	249	249	250	247	251	251	246	243
248	246	246	248	249	245	250	249	242	244
238	240	245	240	237	242	244	242	243	239
242	241	250	243	239	244	246	245	246	240
245	246	250	246	243	246	246	248	247	250
251	247	247	250	247	251	250	243	252	252
247	249	248	248	246	248	246	246	247	250
239	240	238	241	242	243	241	241	241	241
242	243	240	245	244	245	239	244	243	243
246	244	245	243	245	247	244	245	245	249
250	248	248	247	248	252	250	249	248	255
248	245	246	245	245	249	246	247	246	253

Histograma para Espesor



Contraste χ^2 de bondad de ajuste

$$H_0 : X_i, \forall i=1,2,\dots,n \rightarrow f_X$$

$$H_1 : X_i, \forall i=1,2,\dots,n \not\rightarrow f_X$$

Si H_0 es cierto :

Clases	Gr.Observada	Gr.Esperada
$c_0 \leq x_i < c_1$	O_1	E_1
$c_1 \leq x_i < c_2$	O_2	E_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$c_{k-1} \leq x_i < c_k$	O_k	E_k
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$c_{K-1} \leq x_i < c_K$	O_K	E_K

$$\begin{aligned} E_k &= np_k \\ p_k &= \Pr(c_{k-1} \leq X < c_k) \end{aligned}$$

$$\sum_{k=1}^K O_k = \sum_{k=1}^K E_k = n$$

$$\sum_{k=1}^K \frac{(O_k - E_k)^2}{E_k} \rightarrow \chi_{K-r-1}^2$$

Contrastes de hipótesis

49

Justificación del contraste χ^2

$$O_k \rightarrow B(n, p_k) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \boxed{O_k \rightarrow N(np_k, \sqrt{np_k(1-p_k)})}$$

$$E_k = np_k$$

$$\frac{O_k - np_k}{\underbrace{\sqrt{np_k(1-p_k)}}_{\cong 1}} \rightarrow N(0,1)$$

$$\frac{O_k - E_k}{\sqrt{E_k}} \rightarrow N(0,1) \Rightarrow \sum_{k=1}^K \left(\frac{O_k - E_k}{\sqrt{E_k}} \right)^2 \xrightarrow{\text{aprox}} \chi_{K-r-1}^2$$

K $\equiv$ N° de CLASES **r** $\equiv$ N° de parámetro estimados

Contrastes de hipótesis

50

Obleas: Frecuencias Observadas

Clase		Fr. Observada
		O _i
-inf	238	7
238	240	16
240	242	17
242	244	21
244	246	34
246	248	24
248	250	20
250	252	7
252	+inf	4
Total		150

$$\bar{x} = 245.1 \text{ micras}$$

$$\hat{s} = 4 \text{ micras}$$

Frecuencias esperadas $N(245.1;4)$

Clase		Fr. Observada	Fr. Esperada
		O _i	E _i
-inf	238	7	5,88
238	240	16	9,58
240	242	17	17,71
242	244	21	25,71
244	246	34	29,35
246	248	24	26,34
248	250	20	18,58
250	252	7	10,3
252	+inf	4	6,54
Total		150	150

$$p_4 = \Pr(242 \leq X \leq 244)$$

$$= \Pr\left(\frac{242 - 245.1}{4} \leq \frac{X - 245.1}{4} \leq \frac{244 - 245.1}{4}\right)$$

$$= P(-0.275 \leq Z \leq -0.775)$$

$$= 0.1714$$

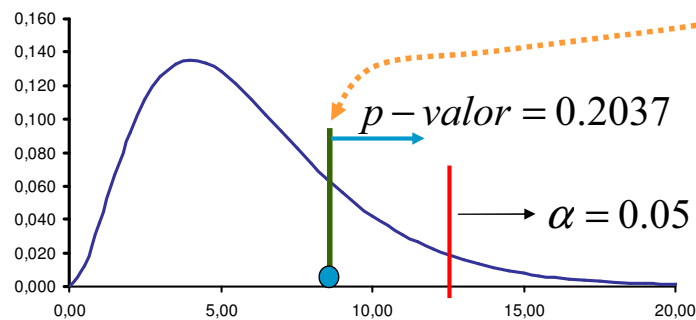
$$E_4 = np_4 = 150 \times 0.1714 = 25.71$$

Contraste de Normalidad

$$H_0 : X_i \rightarrow \text{Normal}$$

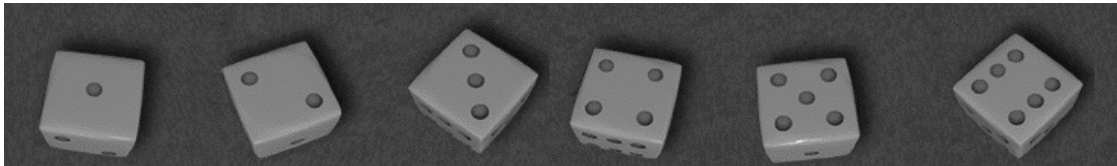
$$H_1 : X_i \nrightarrow \text{Normal}$$

$$\chi_0^2 = \frac{(7-5.88)^2}{5.88} + \frac{(16-9.58)^2}{9.58} + \dots + \frac{(4-6.54)^2}{6.54} = 8.5$$



$$\Pr(\chi_6^2 \leq 12.59) = 0.95$$

$$\chi_0^2 = 8.5 < 12.59 \Rightarrow \text{No se rechaza la hipótesis de normalidad}$$



Se ha lanzado 300 veces un dado y se han obtenido los resultados:

Resultados	Observadas
1	49
2	59
3	49
4	51
5	43
6	49
Total	300

¿Se puede afirmar con $\alpha=0.05$ que el dado está desequilibrado?

$$\Pr(X = i) = 1/6, \quad \forall i = 1, 2, \dots, 6$$

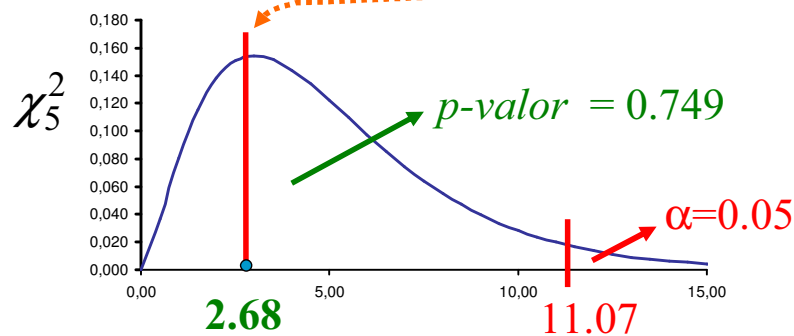
$H_0 : X \rightarrow \text{Equiprobable}$

$H_1 : X \rightarrow \text{No equiprobable}$

Resultados	Observados	Esperados
1	49	50
2	59	50
3	49	50
4	51	50
5	43	50
6	49	50
Total	300	300

$$\chi_0^2 = \frac{(49-50)^2}{50} + \frac{(59-50)^2}{50} + \dots + \frac{(49-50)^2}{50} = 2.68$$

$$\Pr(\chi_5^2 \leq 11.07) = 0.95 \Rightarrow \chi_0^2 = 2.68 < 11.07 \Rightarrow \text{No se Rechaza } H_0$$



Contraste K -S de bondad de ajuste

- Válido únicamente para variables continuas
- Compara la Función de distribución teórica $F(x)$ con la Función de distribución empírica $F_n(x)$.
- No requiere agrupar los datos
- El contraste es aproximado si es necesario estimar los parámetros del modelo

Contraste K -S de bondad de ajuste

■ Pasos:

- Ordenar la muestra $x(1) \leq x(2) \leq x(3) \leq \dots \leq x(n)$

- Calcular la distribución empírica de la muestra

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & x < x(1) \\ \frac{r}{n} & x(r) \leq x < x(r+1) \\ 1 & x \geq x(n) \end{cases}$$

- Calcular la discrepancia máxima

$$\max\{Dn(x)\} = \max\{|F_n(x) - F(x)|\}$$

- Comparar con el valor obtenido en las tablas para un n y α determinados

Contraste K -S de bondad de ajuste

Se han tomado 12 valores de una variable física X , que se supone Normal, resultando

30,2 30,8 29,3 29,0 30,9 30,8 29,7 28,9 30,5 31,2 31,3 28,5

Contraste la hipótesis de normalidad mediante el contraste de K -S.

$$H_0 : X_i \rightarrow \text{Normal}$$

$$H_1 : X_i \nrightarrow \text{Normal}$$

De la muestra



$$\bar{x} = 30,09$$

$$\hat{s} = 0,97$$

Contraste $K-S$ de bondad de ajuste

X	$F_n(x)$	$F(x)$	$F_n(xh-1)-F(xh)$	$F_n(xh)-F(xh)$	$D_n(xh)$
28,5	1/12=0,08	0,05	0,05	0,03	0,05
28,9	2/12=0,17	0,11	0,03	0,06	0,06
29	3/12=0,25	0,13	0,04	0,12	0,12
29,3	4/12=0,33	0,21	0,04	0,12	0,12
29,7	5/12=0,42	0,34	0,01	0,08	0,08
30,2	6/12=0,5	0,54	0,12	0,04	0,12
30,5	7/12=0,58	0,66	0,16	0,08	0,16
30,8					
30,8	9/12=0,75	0,77	0,19	0,02	0,19
30,9	10/12=0,83	0,8	0,05	0,03	0,05
31,2	11/12=0,92	0,87	0,04	0,05	0,05

$$\max\{D_n(x_h)\} = 0,19$$

$$\begin{aligned}
 F(29,7) &= P(X \leq 29,7 | X \rightarrow N(30,09; 0,97)) = \\
 &= P\left(\frac{X - 30,09}{0,97} \leq \frac{29,7 - 30,09}{0,97}\right) = \\
 &= P(Z \leq -0,40) = 0,34.
 \end{aligned}$$

Valores Críticos de $D = |F_n(x) - F(x)|$
donde $F_n(x)$ es la distribución muestral de
tamaño n y $F(x)$ la distribución teórica

Ejemplo

Tabla Contraste de Kolmogorov-Smirnov					
Tamaño muestral	Nivel de significación				
n	0,20	0,15	0,10	0,05	0,01
1	0,900	0,925	0,950	0,975	0,995
2	0,684	0,726	0,776	0,842	0,929
3	0,565	0,597	0,642	0,708	0,828
4	0,494	0,525	0,564	0,624	0,733
5	0,446	0,474	0,510	0,565	0,669
6	0,410	0,436	0,470	0,521	0,618
7	0,381	0,405	0,438	0,486	0,577
8	0,358	0,381	0,411	0,457	0,543
9	0,339	0,360	0,388	0,432	0,514
10	0,322	0,342	0,368	0,410	0,490
11	0,307	0,362	0,352	0,391	0,468
12	0,295	0,313	0,338	0,375	0,450
13	0,284	0,302	0,325	0,361	0,433
14	0,274	0,292	0,314	0,349	0,418
15	0,266	0,283	0,304	0,338	0,404
16	0,258	0,274	0,295	0,328	0,392
17	0,250	0,266	0,286	0,318	0,381
18	0,244	0,259	0,278	0,309	0,371
19	0,237	0,252	0,272	0,301	0,363
20	0,231	0,246	0,264	0,294	0,356
25	0,21	0,22	0,24	0,27	0,32
30	0,19	0,20	0,22	0,24	0,29
35	0,18	0,19	0,21	0,23	0,27
>35	1,07/n ^{1/2}	1,14/n ^{1/2}	1,22/n ^{1/2}	1,36/n ^{1/2}	1,63/n ^{1/2}

$$\max\{Dn(x_h)\} = 0,19 \leq D_{12;0,05} = 0,375$$

No se puede rechazar la hipótesis de normalidad con un nivel de significación de 0,05

Ejercicios propuestos

Capítulo 7. Contraste de Hipótesis

7.1 Un proceso industrial fabrica piezas cuya longitud en mm se distribuye según una $N(190, 10)$. Una muestra de 5 piezas proporciona los resultados siguientes:

187, 212, 195, 208, 192

- (a) Contrastar la hipótesis de que la media del proceso μ es efectivamente 190.
- (b) Contrastar la hipótesis de que la varianza del proceso σ^2 es 100
- (c) Admitiendo que la varianza del proceso es 100, construir la curva de potencia para un contraste de la media con 5 observaciones. Tómese $\alpha = 0.05$ en todos los contrastes.

7.2 Para contrastar unilateralmente que la esperanza μ de una variable aleatoria normal es 10, se toma una muestra de tamaño 16 y se rechaza la hipótesis en el caso en que la media muestral sea mayor que 11, aceptándose en el caso contrario. Sabiendo que la desviación típica de la población es $\sigma = 2$, ¿cuál es la probabilidad de error de tipo I de este contraste?. ¿Cuál sería la probabilidad de error de tipo II del contraste si el valor verdadero de la esperanza fuese 12?.

7.3 Una medicina estándar es efectiva en el 75% de los casos en los que se aplica. Se ha comprobado un nuevo medicamento en 100 pacientes, observándose su efectividad en 85 de ellos. ¿Es la nueva medicina más efectiva que la estándar ? (Contrastar con $\alpha = 0.05$).

7.4 Un empresario quiere comprar una empresa que fabrica cojinetes. Durante los 5 últimos años la proporción de cojinetes defectuosos se ha mantenido en un 3%. Para verificar esto, se toma una muestra de 200 cojinetes y obtiene que 9 son defectuosos. ¿Se puede concluir que la proporción de cojinetes defectuosos ha aumentado? Calcular la potencia del contraste planteado anteriormente en función de p . Calcular la probabilidad de error de tipo II cuando la hipótesis alternativa es $p = 0.06$, siendo p la proporción de defectuosos. (Nota: Utilícese la aproximación normal y $\alpha = 0,05$).

7.5 Teniendo en cuenta que si $X_1, X_2, \dots, X_n$ es una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria exponencial con función de densidad, $f(x) = \frac{1}{\lambda}e^{-x/\lambda}$, $x \geq 0$, $\lambda > 0$; el estadístico $U = 2n\bar{X}/\lambda$ tiene distribución χ^2_{2n} , donde $\bar{X} = (X_1 + X_2 + \dots + X_n)/n$; resolver las cuestiones siguientes:

- (a) El tiempo de funcionamiento de un equipo electrónico es una variable aleatoria con distribución exponencial. Se han tomado los tiempos de funcionamiento hasta el fallo de 30 equipos elegidos al azar, obteniéndose 6.2×10^3 horas de media. Contrastar con nivel de significación igual a 0.05, $H_0 : \lambda = 5 \times 10^3$ horas, frente a $H_1 : \lambda > 5 \times 10^3$ horas; indicando: (a) el valor crítico, y (b) la probabilidad de error tipo II cuando $\lambda = 7 \times 10^3$ horas. (Es suficiente con proporcionar el valor más próximo obtenido en las tablas del libro de texto).
- (b) Se va a realizar un ensayo con 15 equipos fabricados por una segunda empresa. Si el tiempo de funcionamiento de estos tiene también distribución exponencial. ¿Cuál es el valor máximo de la media muestral de estos quince equipos que permitiría concluir con $\alpha = 0.05$ que son peores que los de la primera empresa? Después de 6000 horas de ensayo han fallado 6 equipos, siendo el promedio de estos seis valores igual a 2350 horas. ¿Es necesario seguir el ensayo para tomar una decisión ?

7.6 En la tabla se reproducen los valores para la velocidad de la luz en el aire que obtuvieron Michelson y Newcomb en 1879 y 1992 respectivamente, utilizando métodos distintos . A los datos originales en km/s se les ha restado 299000 para facilitar su tratamiento matemático.

		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1.	Mic.	850	740	900	1070	930	850	950	980	980	880
	New.	883	816	778	796	682	711	611	599	1051	781

		11	12	13	14	15	$\bar{y}$	$\hat{s}$
	Mic.	1000	980	930	650	760	896,6	119,47
	New.	578	796	774	820	772	763,2	111,91

- Contraste la hipótesis de que la variabilidad es la misma en los experimentos de Michelson y Newcomb. ($\alpha = 0,05$)
- Sabiendo que la velocidad de la luz en el vacío es 299.792,5 km/s (792,5 si se le resta 299.000), y que en aire debe ser igual o menor que en el vacío, contraste la hipótesis de que los experimentos no tienen error sistemático, es decir la medida obtenida es igual al verdadero valor más un error aleatorio de media cero. ($\alpha = 0,05$)

7.7 Se estudian dos tipos de neumáticos con los resultados siguientes:

Tipo	n_i	$\bar{x}_i(Km)$	$\hat{s}_i(Km)$
A	121	27465	2500
B	121	27572	3000

- Calcular, con $\alpha = 0.01$,
- Un intervalo de confianza para $\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2}$.
- Un intervalo de confianza para $\mu_1 - \mu_2$.

7.8 Se dispone de rendimientos de dos máquinas. Los resultados de la máquina A son 137.5; 140.7; 106.9; 175.1; 177.3; 120.4; 77.9 y 104.2, mientras que los resultados para la B son: 103.3; 121.7; 98.4; 161.5; 167.8 y 67.3. ¿Son las máquinas iguales? (Suponer que los rendimientos de ambas máquinas siguen distribuciones normales).

7.9 Un fabricante de automóviles debe elegir entre un determinado tipo de piezas de acero suministradas por un proveedor A y otras suministradas por otro proveedor B. Para proceder a la elección se ha analizado la resistencia a la tracción de las piezas suministradas por ambos proveedores, tomando una muestra de tamaño 10 de las piezas del primero, y otra de tamaño 12 del segundo. La resistencia media de la muestra de A es de 54000 unidades y la de la muestra de B es de 49000 unidades, siendo las desviaciones típicas muestrales corregidas $\hat{s}_A = 2100$ y $\hat{s}_B = 1900$. Las resistencias de las piezas de ambos proveedores se distribuyen normalmente. Las piezas del proveedor B son más baratas que las del proveedor A, por lo que estas últimas sólo son rentables si tienen una resistencia media al menos 2000 unidades mayor que las de B, y la misma variabilidad.

- ¿A qué proveedor habría que comprar las piezas a la vista de los resultados muestrales?
- Obtener un intervalo de confianza del 90\%

- 7.10 La estatura de 60 niños de una escuela infantil se resume en la siguiente tabla de frecuencias, dónde la última columna muestra la frecuencia esperada bajo la hipótesis de normalidad.

	Frecuencia	Frecuencia
Intervalo	Observada	Esperada
41,5-43,5	4	4,08
43,5-45,5	7	5,58
45,5-47,5	12	9,06
47,5-49,5	8	11,27
49,5-51,5	6	11,27
51,5-53,5	11	9,08
53,5-55,5	9	5,58
55,5-57,5	3	4,08
Total	60	60

¿Se puede aceptar la hipótesis de normalidad de los datos ($\alpha = 0.05$) ?

- 7.11 Se tira 120 veces un dado y se obtienen los resultados de la tabla

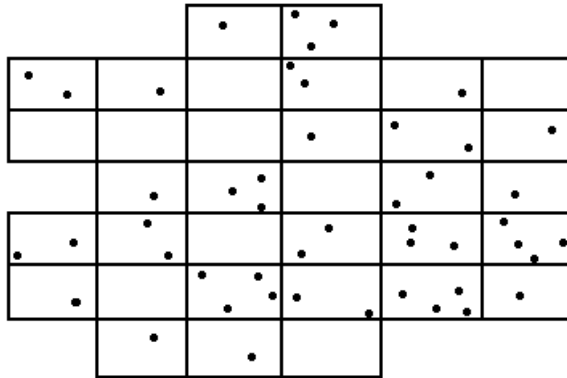
VALOR	1	2	3	4	5	6
FRECUENCIA	20	14	23	12	26	25

Contrastar la hipótesis de que el dado está equilibrado y que, por tanto, sus caras son equiprobables. (Tómese $\alpha = 0.05$).

- 7.12 Se han tomado 12 valores de una variable física X, que se supone normal, resultando 30.2, 30.8, 29.3, 29, 30.9, 30.8, 29.7, 28.9, 30.5, 31.2, 31.3, 28.5.

Analizar la hipótesis de normalidad mediante el contraste de Kolmogorov-Smirnov.

- 7.13 Un modelo sísmico indica que la distribución de los epicentros de sismos en una región debería seguir una distribución de Poisson en el plano. Un grupo de expertos pretende contrastar si ese modelo se cumple, para ello ha representado un mapa de la región dividido en cuadrículas de tamaño 100 km^2 , y ha señalado con puntos las posiciones de los epicentros (véase figura adjunta). Realizar el contraste χ^2 de bondad de ajuste con nivel de significación $\alpha = 0,05$ proporcionando el nivel crítico aproximado del contraste.



7.14 El Ministerio de defensa está considerando un nuevo sistema de apoyo para el lanzamieto de misiles de corto alcance. El sistema existente tiene errores en el 7% de los lanzamientos y se desea comprobar si el nuevo sistema tiene una probabilidad de fallo menor. El ensayo va a consistir en realizar 20 lanzamientos y se concluirá que el nuevo sistema es mejor si no se produce ningún fallo. Llamando p a la probabilidad de fallo del sistema nuevo y aceptando independencia entre los resultados del lanzamiento, obtenga y represente gráficamente la probabilidad de error de tipo II del contraste

$$\begin{cases} H_0 : p = 0.07 \\ H_1 : p < 0.07 \end{cases}$$

Obtenga la probabilidad de error tipo I. Interprete el resultado y valore si el método de decisión es adecuado.

7.15 El tiempo de duración T de un componente electrodinámico es una variable aleatoria con distribución exponencial de media μ . Veinte componentes han sido sometidos a un ensayo y el número de horas que han durado ha sido:

10.99	15.79	24.14	34.43	43.72	51.72	56.12	60.27	77.20	88.47
91.07	117.58	130.40	133.12	152.90	159.00	193.62	208.71	308.82	316.07

Teniendo en cuenta que $2T/\mu$ tiene distribución χ^2 con dos grados de libertad, realiza el siguiente contraste

$$\begin{aligned} H_0 & : \mu = 200 \text{ horas,} \\ H_1 & : \mu < 200 \text{ horas,} \end{aligned}$$

con $\alpha = 0.05$.