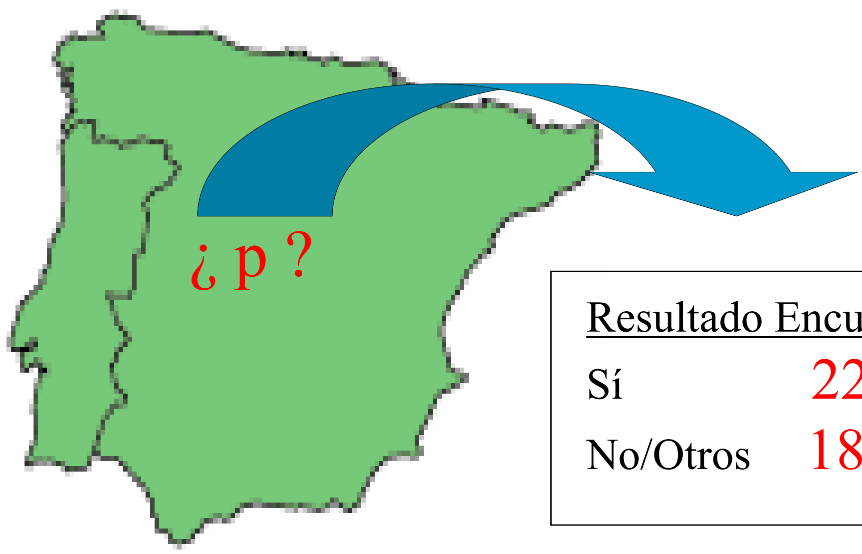
6. Intervalos de confianza

Curso 2011-2012
Estadística

Concepto de intervalo de confianza

Se ha realizado una encuesta a 400 personas elegidas al azar para estimar la proporción p de votantes de un partido político.



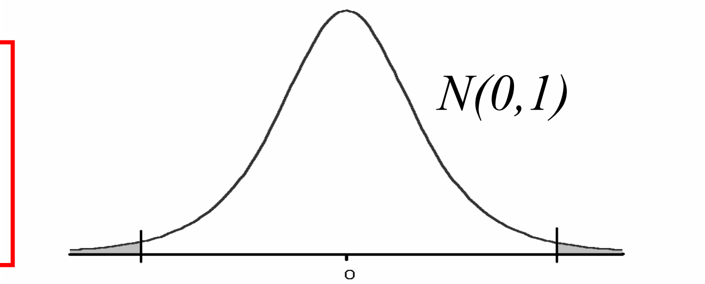
Resultado Encuesta	
Sí	220
No/Otros	180

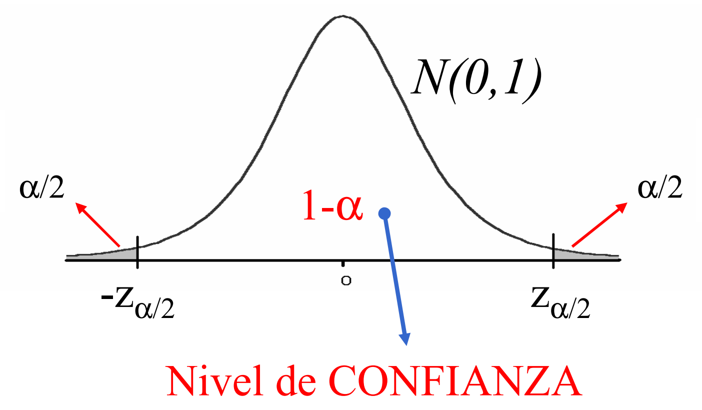
Introducción

$$X \to B(n,p) \qquad X \overset{aprox.}{\to} N(np, \sqrt{np(1-p)})$$

$$\hat{p} = \frac{X}{n} \to N(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}})$$

$$\boxed{\frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \to N(0,1)}$$





$$P(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq z_{\alpha/2}) = 1-\alpha$$

Despejando p de: $\boxed{-z_{\alpha/2} \leq \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \leq z_{\alpha/2}}$

$$-z_{\alpha/2} \le \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}} \le z_{\alpha/2}$$

$$\Downarrow$$

$$-z_{\alpha/2} \le \frac{\hat{p}-p}{\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}} \le z_{\alpha/2}$$

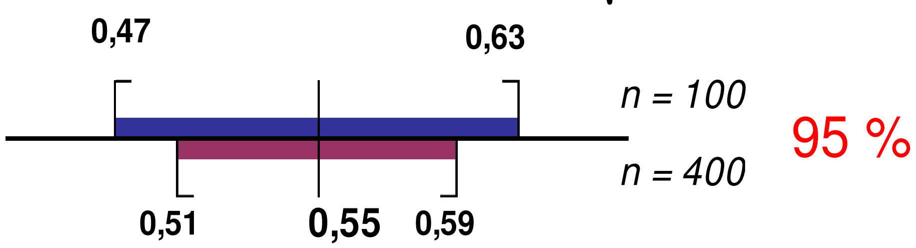
$$\Downarrow$$

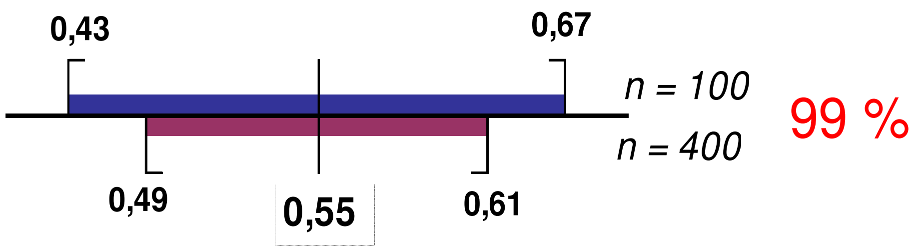
$$\boxed{\hat{p}-z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \le \quad p \quad \le \hat{p}+z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}}$$

Nivel de confianza: (1-α) Tamaño Muestral n

Ejemplo $\hat{p} = \frac{220}{400} = 0{,}55$

$$p \in 0{,}55 \pm 1{,}96\sqrt{\frac{0{,}55 \times 0{,}45}{400}}$$





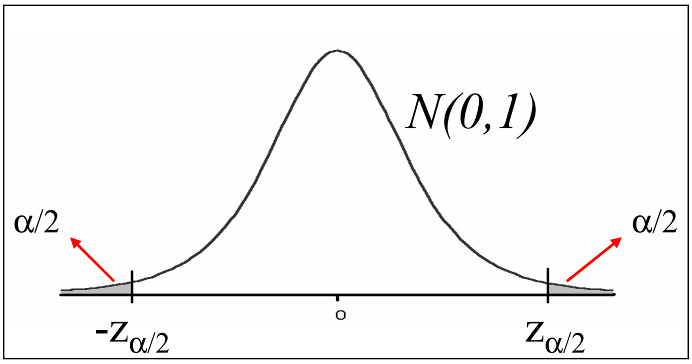
1. Normal: Intervalo para μ con σ conocido

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \to N(\mu, \sigma)$$

$$\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \to N(0,1)$$

$$-z_{\alpha/2} \leq \frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \leq z_{\alpha/2}$$



$$\overline{x} - z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{x} + z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

$$\boxed{\mu \in \overline{x} \pm z_{\alpha/2} \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

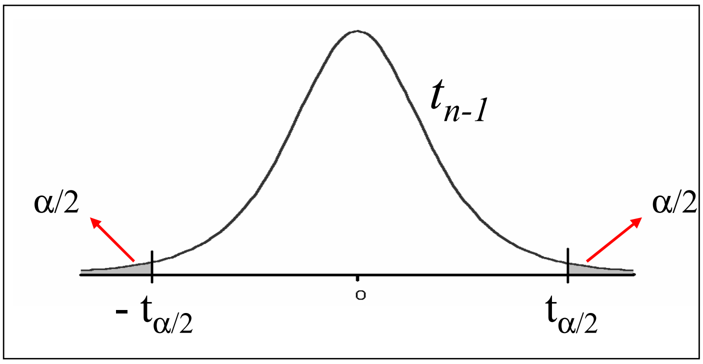
2. Normal:Intervalo para μ con σ desconocido

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \to N(\mu, \sigma)$$

$$\overline{X} \to N(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\sigma / \sqrt{n}} \to N(0,1)$$

$$\frac{\overline{X} - \mu}{\hat{S} / \sqrt{n}} \to t_{n-1}$$



$$-t_{n-1,\alpha/2} \leq \frac{\overline{X} - \mu}{\hat{S} / \sqrt{n}} \leq t_{n-1,\alpha/2}$$

$$\boxed{\overline{x} - t_{n-1,\alpha/2} \frac{\hat{s}}{\sqrt{n}} \leq \mu \leq \overline{x} + t_{n-1,\alpha/2} \frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}}$$

$$\boxed{\mu \in \overline{x} \pm t_{n-1,\alpha/2} \frac{\hat{s}}{\sqrt{n}}}$$

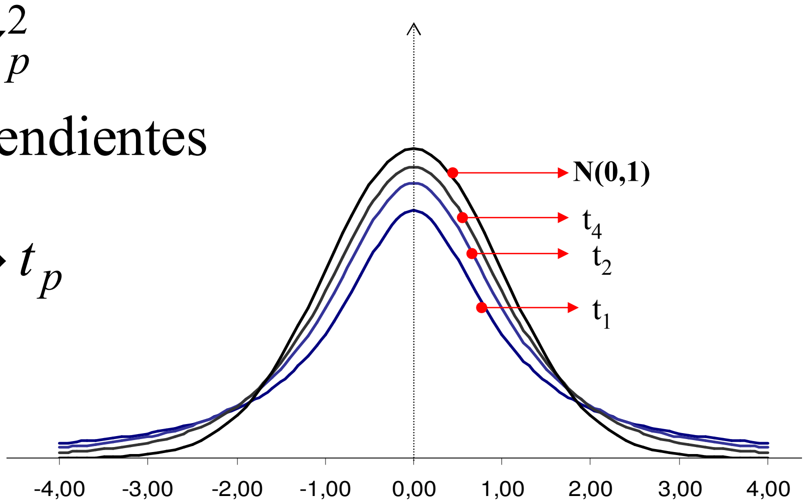
Distribución **t** de *Student*

$$Z \to N(0,1)$$

$$V \to \chi^2_p$$

$$Z, V \text{ son independientes}$$

$$\frac{Z}{\sqrt{V/p}} \to t_p$$



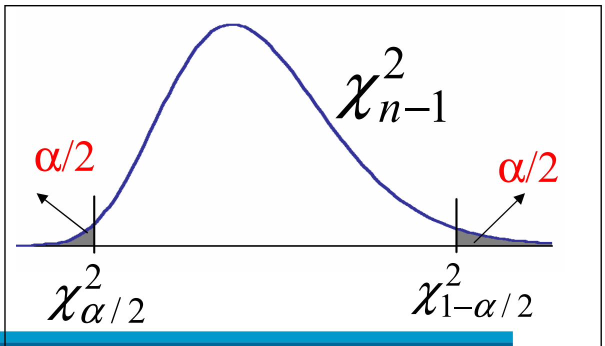
3. Normal: Intervalo para σ^2

$$X_1, X_2, \ldots, X_n \to N(\mu, \sigma)$$

$$\hat{S}^2 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \overline{X})^2}{n-1} \qquad \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2} \to \chi^2_{n-1}$$

$$P\left(\chi^2_{\alpha/2} \le \frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2} \le \chi^2_{1-\alpha/2}\right) = 1-\alpha$$

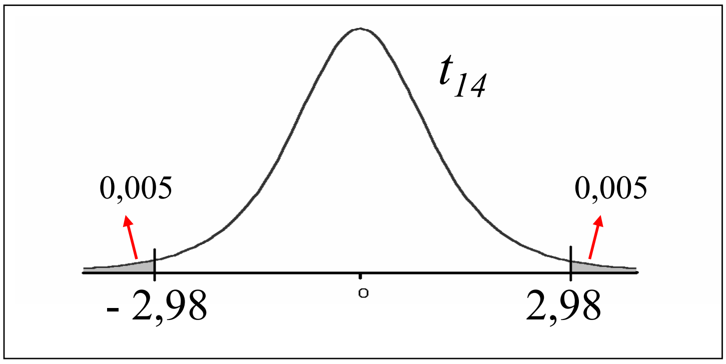
$$\boxed{\frac{(n-1)\hat{s}^2}{\chi^2_{1-\alpha/2}} \le \sigma^2 \le \frac{(n-1)\hat{s}^2}{\chi^2_{\alpha/2}}}$$



EJEMPLO 1. La resistencia a la compresión de 15 probetas de acero elegidas al azar es:

40,15	65,10	49,50	22,40	38,20
60,40	43,40	26,35	31,20	55,60
47,25	73,20	35,90	45,25	52,40

$$\frac{\overline{X}-\mu}{\hat{S}/\sqrt{15}} \rightarrow t_{14}$$

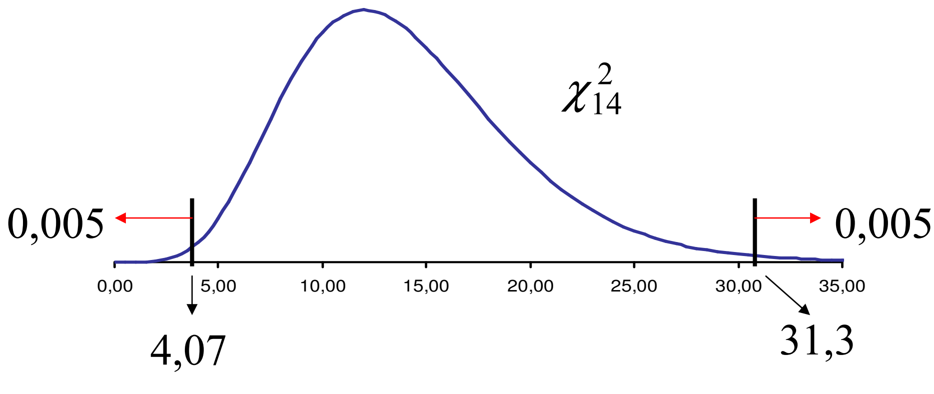


$$-2{,}98 \leq \frac{\overline{X}-\mu}{\hat{S}/\sqrt{15}} \leq 2{,}98$$

$$\bar{x}=45{,}75 \quad \hat{s}=14{,}2$$

$$45{,}75-2{,}98\frac{14{,}2}{\sqrt{15}} \leq \mu \leq 45{,}75+2{,}98\frac{14{,}2}{\sqrt{15}}$$

99 % confianza: $34{,}8 \leq \mu \leq 56{,}7$



$$\frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2} \rightarrow \chi^2_{n-1} \qquad \frac{14\hat{S}^2}{\sigma^2} \rightarrow \chi^2_{14}$$

$$P(4{,}07 \leq \frac{14\hat{S}^2}{\sigma^2} \leq 31{,}3)=0{,}99$$

$$\hat{s}^2=201{,}6 \longrightarrow \frac{14\times 201{,}6}{31{,}3} \leq \sigma^2 \leq \frac{14\times 201{,}6}{4{,}07}$$

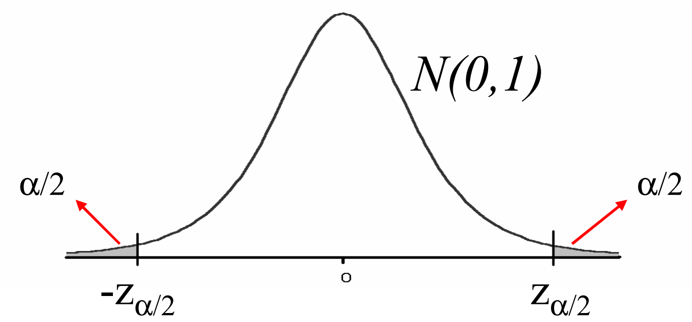
99% confianza: $90{,}2 \leq \sigma^2 \leq 693{,}6$

4. Poisson: Intervalo para λ

$$X_1, X_2, ..., X_n \rightarrow \text{Poisson}(\lambda)$$

$$\hat{\lambda} = \overline{X} \overset{aprox}{\rightarrow} N(\lambda, \sqrt{\frac{\lambda}{n}})$$

$$\frac{\hat{\lambda} - \lambda}{\sqrt{\frac{\lambda}{n}}} \rightarrow N(0,1)$$



$$P(-z_{\alpha/2} \leq \frac{\hat{\lambda} - \lambda}{\sqrt{\lambda / n}} \leq z_{\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

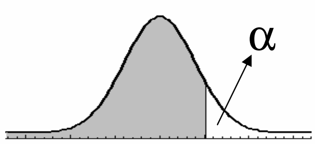
$$\boxed{\hat{\lambda} - z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{\lambda}}{n}} \leq \lambda \leq \hat{\lambda} + z_{\alpha/2}\sqrt{\frac{\hat{\lambda}}{n}}}$$

Tabla

t-Student

α

g.l	0,20	0,15	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0025	0,001	0,0005
1	1,376	1,963	3,078	6,314	12,706	31,821	63,656	127,321	318,289	636,578
2	1,061	1,386	1,886	2,920	4,303	6,965	9,925	14,089	22,328	31,600
3	0,978	1,250	1,638	2,353	3,182	4,541	5,841	7,453	10,214	12,924
4	0,941	1,190	1,533	2,132	2,776	3,747	4,604	5,598	7,173	8,610
5	0,920	1,156	1,476	2,015	2,571	3,365	4,032	4,773	5,894	6,869
6	0,906	1,134	1,440	1,943	2,447	3,143	3,707	4,317	5,208	5,959
7	0,896	1,119	1,415	1,895	2,365	2,998	3,499	4,029	4,785	5,408
8	0,889	1,108	1,397	1,860	2,306	2,896	3,355	3,833	4,501	5,041
9	0,883	1,100	1,383	1,833	2,262	2,821	3,250	3,690	4,297	4,781
10	0,879	1,093	1,372	1,812	2,228	2,764	3,169	3,581	4,144	4,587
11	0,876	1,088	1,363	1,796	2,201	2,718	3,106	3,497	4,025	4,437
12	0,873	1,083	1,356	1,782	2,179	2,681	3,055	3,428	3,930	4,318
13	0,870	1,079	1,350	1,771	2,160	2,650	3,012	3,372	3,852	4,221
14	0,868	1,076	1,345	1,761	2,145	2,624	2,977	3,326	3,787	4,140
15	0,866	1,074	1,341	1,753	2,131	2,602	2,947	3,286	3,733	4,073
16	0,865	1,071	1,337	1,746	2,120	2,583	2,921	3,252	3,686	4,015
17	0,863	1,069	1,333	1,740	2,110	2,567	2,898	3,222	3,646	3,965
18	0,862	1,067	1,330	1,734	2,101	2,552	2,878	3,197	3,610	3,922
19	0,861	1,066	1,328	1,729	2,093	2,539	2,861	3,174	3,579	3,883
20	0,860	1,064	1,325	1,725	2,086	2,528	2,845	3,153	3,552	3,850
21	0,859	1,063	1,323	1,721	2,080	2,518	2,831	3,135	3,527	3,819
22	0,858	1,061	1,321	1,717	2,074	2,508	2,819	3,119	3,505	3,792
23	0,858	1,060	1,319	1,714	2,069	2,500	2,807	3,104	3,485	3,768
24	0,857	1,059	1,318	1,711	2,064	2,492	2,797	3,091	3,467	3,745
25	0,856	1,058	1,316	1,708	2,060	2,485	2,787	3,078	3,450	3,725
26	0,856	1,058	1,315	1,706	2,056	2,479	2,779	3,067	3,435	3,707
27	0,855	1,057	1,314	1,703	2,052	2,473	2,771	3,057	3,421	3,689
28	0,855	1,056	1,313	1,701	2,048	2,467	2,763	3,047	3,408	3,674
29	0,854	1,055	1,311	1,699	2,045	2,462	2,756	3,038	3,396	3,660
30	0,854	1,055	1,310	1,697	2,042	2,457	2,750	3,030	3,385	3,646
40	0,851	1,050	1,303	1,684	2,021	2,423	2,704	2,971	3,307	3,551
50	0,849	1,047	1,299	1,676	2,009	2,403	2,678	2,937	3,261	3,496
60	0,848	1,045	1,296	1,671	2,000	2,390	2,660	2,915	3,232	3,460
70	0,847	1,044	1,294	1,667	1,994	2,381	2,648	2,899	3,211	3,435
80	0,846	1,043	1,292	1,664	1,990	2,374	2,639	2,887	3,195	3,416
90	0,846	1,042	1,291	1,662	1,987	2,368	2,632	2,878	3,183	3,402
100	0,845	1,042	1,290	1,660	1,984	2,364	2,626	2,871	3,174	3,390
infinito	0,842	1,036	1,282	1,645	1,960	2,327	2,576	2,808	3,091	3,291
	0,20	0,15	0,10	0,05	0,025	0,01	0,005	0,0025	0,001	0,0005



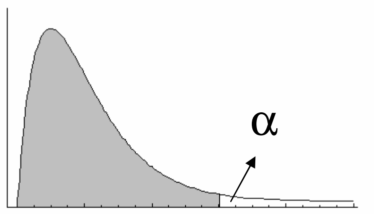
$t_{\nu,\alpha}$

ν: grados de libertad (g.l.)

EJEMPLO

$P(t_9 \geq 2{,}262) = 0{,}025$

Tabla χ^2



$\chi_{\nu,1-\alpha}$

ν: grados de libertad (g.l.)

EJEMPLO

$P(\chi_9 \geq 19{,}02) = 0{,}025$

α

g.l.	0,995	0,990	0,975	0,950	0,500	0,050	0,025	0,010	0,005
1	,00004	,00016	,00098	,00393	0,455	3,841	5,024	6,635	7,879
2	,01002	,0201	0,051	0,103	1,386	5,991	7,378	9,210	10,60
3	,0717	0,115	0,216	0,352	2,366	7,815	9,348	11,34	12,84
4	0,207	0,297	0,484	0,711	3,357	9,488	11,14	13,28	14,86
5	0,412	0,554	0,831	1,145	4,351	11,07	12,83	15,09	16,75
6	0,676	0,872	1,237	1,635	5,348	12,59	14,45	16,81	18,55
7	0,989	1,239	1,690	2,167	6,346	14,07	16,01	18,48	20,28
8	1,344	1,647	2,180	2,733	7,344	15,51	17,53	20,09	21,95
9	1,735	2,088	2,700	3,325	8,343	16,92	19,02	21,67	23,59
10	2,156	2,558	3,247	3,940	9,342	18,31	20,48	23,21	25,19
11	2,603	3,053	3,816	4,575	10,341	19,68	21,92	24,73	26,76
12	3,074	3,571	4,404	5,226	11,340	21,03	23,34	26,22	28,30
13	3,565	4,107	5,009	5,892	12,340	22,36	24,74	27,69	29,82
14	4,075	4,660	5,629	6,571	13,339	23,68	26,12	29,14	31,32
15	4,601	5,229	6,262	7,261	14,339	25,00	27,49	30,58	32,80
16	5,142	5,812	6,908	7,962	15,338	26,30	28,85	32,00	34,27
17	5,697	6,408	7,564	8,672	16,338	27,59	30,19	33,41	35,72
18	6,265	7,015	8,231	9,390	17,338	28,87	31,53	34,81	37,16
19	6,844	7,633	8,907	10,117	18,338	30,14	32,85	36,19	38,58
20	7,434	8,260	9,591	10,851	19,337	31,41	34,17	37,57	40,00
21	8,034	8,897	10,283	11,591	20,337	32,67	35,48	38,93	41,40
22	8,643	9,542	10,982	12,338	21,337	33,92	36,78	40,29	42,80
23	9,260	10,196	11,689	13,091	22,337	35,17	38,08	41,64	44,18
24	9,886	10,856	12,401	13,848	23,337	36,42	39,36	42,98	45,56
25	10,520	11,524	13,120	14,611	24,337	37,65	40,65	44,31	46,93
26	11,160	12,198	13,844	15,379	25,336	38,89	41,92	45,64	48,29
27	11,808	12,878	14,573	16,151	26,336	40,11	43,19	46,96	49,65
28	12,461	13,565	15,308	16,928	27,336	41,34	44,46	48,28	50,99
29	13,121	14,256	16,047	17,708	28,336	42,56	45,72	49,59	52,34
30	13,787	14,953	16,791	18,493	29,336	43,77	46,98	50,89	53,67
40	20,707	22,164	24,433	26,509	39,335	55,76	59,34	63,69	66,77
50	27,991	29,707	32,357	34,764	49,335	67,50	71,42	76,15	79,49
60	35,534	37,485	40,482	43,188	59,335	79,08	83,30	88,38	91,95
70	43,275	45,442	48,758	51,739	69,334	90,53	95,02	100,43	104,21
80	51,172	53,540	57,153	60,391	79,334	101,88	106,63	112,33	116,32
90	59,196	61,754	65,647	69,126	89,334	113,15	118,14	124,12	128,30
100	67,328	70,065	74,222	77,929	99,334	124,34	129,56	135,81	140,17
120	83,852	86,923	91,573	95,705	119,334	146,57	152,21	158,95	163,65

Ejercicios propuestos

Capítulo 6. Intervalos de confianza

6.1 Se han tomado 12 valores de una variable física X, que se supone normal, resultando

30.2, 30.8, 29.3, 29, 30.9, 30.8, 29.7, 28.9, 30.5, 31.2, 31.3, 28.5.

(a) Construir un intervalo de confianza para la media de la población al 95% de confianza.

(b) Construir un intervalo de confianza para la varianza de la población con el mismo nivel de confianza del apartado anterior.

6.2 En la lista adjunta se indica la edad y el área científica en que trece importantes científicos de diversas áreas descubrieron la teoría que les ha dado la fama. Construir con estos datos un intervalo de confianza para la edad a la que los científicos realizan su contribución más importante: Galileo (34, astronomía), Franklin (40, electricidad), Lavoisier (31, química), Lyell (33, geología), Darwin (49, biología), Maxwell (33, ecuaciones de la luz), Curie (34, radiactividad), Plank (43, teoría cuántica), Marx (30, socialismo científico), Freud (31, psicoanálisis), Bohr (26, modelo del átomo), Einstein (26, relatividad), Keynes (36, macroeconomía).

6.3 Una muestra de 12 estaciones de servicio de una cadena de gasolineras proporciona un ingreso medio por persona al mes de 2340 euros con una desviación típica de 815 euros. Calcular un intervalo de confianza para el ingreso medio por trabajador en esta empresa. Calcular el número de estaciones que debemos estudiar para que el intervalo tenga una amplitud máxima de 500 euros.

6.4 Se han escogido al azar 15 probetas de un determinado acero, cuya resistencia a la compresión se supone que se distribuye normalmente, y se ha medido ésta en las unidades adecuadas, habiéndose observado los resultados siguientes

40.15, 65.10, 49.5, 22.4, 38.2, 60.4, 43.4, 26.35, 31.2, 55.6, 47.25, 73.2, 35.9, 45.25, 52.4.

(a) Estimar la resistencia media del acero y su varianza.

(b) Hallar un intervalo de confianza del 99% para la resistencia media.

(c) Hallar un intervalo de confianza del 99% para la varianza.

(d) ¿Cuántas probetas deberían haberse utilizado en el estudio si se quisiera estimar la resistencia media del acero con una precisión de ± 6 unidades y una confianza del 95%?.

6.5 Una compañía de comida precocinada desea lanzar al mercado un nuevo producto. Para conocer la aceptación del mismo realiza previamente una encuesta entre 200 personas elegidas al azar, de las que 37 manifiestan su disposición a comprarlo. Obtener un intervalo de confianza ($\alpha = 0.05$) para la proporción p de compradores potenciales de este nuevo producto. ¿Cúal debería ser el tamaño muestral si se quisiera reducir la longitud del intervalo a la mitad.

6.6 Se desea estimar la proporción de niños entre 0 y 14 años que se encuentran adecuadamente vacunados contra la poliomielitis. Si se quiere que la diferencia en valor absoluto entre la estimación final y el verdadero valor de la proporción sea menor que 0.05 con probabilidad 0.95, ¿ Cúal es el tamaño muestral mínimo requerido?.

6.7 Una roca lunar es enviada a un laboratorio para determinar su nivel de radiactividad θ, nivel que se mide por el número medio de partículas emitidas por hora. Después de 15 horas, el equipo Geiger ha contabilizado un total de 3.547 partículas emitidas. Aceptando que el número de partículas emitidas sigue una distribución de Poisson, dar un intervalo con 95% de confianza para el nivel de radiactividad de la roca. (Nota.- Utilizar que si Z tiene distribución N(0,1), entonces $P(Z \leq 1.96) = 0.975$).

6.8 Teniendo en cuenta que si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ es una muestra aleatoria simple de una variable aleatoria exponencial con función de densidad, $f(x) = \frac{1}{\lambda} e^{-x/\lambda}, \quad x \geq 0,\ \lambda > 0$; el estadístico $U = 2n\overline{X}/\lambda$ tiene distribución χ^2_{2n}, donde $\overline{X} = (X_1 + X_2 + \cdots + X_n)/n$; resolver la cuestión siguiente:

El tiempo de funcionamiento de un equipo electrónico es una variable aleatoria con distribución exponencial. Se han tomado los tiempos de funcionamiento hasta el fallo de 30 equipos elegidos al azar, obteniéndose 6.2×10^3 horas de media. Calcular un intervalo con 95 % de confianza para la vida media de un equipo.

6.9 En una centralita ha habido 180 llamadas durante las últimas dos horas. Obtenga un intervalo de confianza para la esperanza del número de llamadas por hora suponiendo que el número de llamadas durante un periodo de duración T cualquiera sigue una distribución de Poisson.

6.10 La velocidad de una molécula según el modelo de Maxwell, es una variable aleatoria con función de densidad

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{\sqrt{\pi}} \times \dfrac{1}{\alpha^3} x^2 \exp -(x/\alpha)^2, & x \geq 0 \\ 0, & x \leq 0. \end{cases}$$

donde $\alpha > 0$, es el parámetro de la distribución y se verifica que

$$E(X) = \frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}} \text{ y } Var(X) = \frac{3}{2} - \frac{4}{\pi}\alpha^2.$$

(a) Calcular el estimador máximo verosímil de α y su varianza asintótica.

(b) Calcular el estimador por momentos de α y la varianza de dicho estimador.

(c) Para una muestra de tamaño n=100, para la que se verifica que $\sum_{i=1}^{100} x_i = 342$ y que $\sum_{i=1}^{100} x_i^2 = 1339$,hallar un intervalo de confianza de α con el 95% de confianza utilizando ambos estimadores.

6.11 Los núcleos (radionucleidos) del elemento radiactivo Carbono 14 (C^{14}) se desintegran aleatoriamente. El tiempo que tarda en desintegrarse cada radionucleido es una variable aleatoria con distribución exponencial de media $8,27 \times 10^3$ años.

(a) Si inicialmente había 10^{12} radionucleidos, obtener el número esperado de los radionucleidos sin desintegrar al cabo de los 20.000 años.

(b) Obtener, para la variable aleatoria *número de radionucleidos sin desintegrar al cabo de 20.000 años,* un intervalo que contenga al valor de esa variable con probabilidad $0,95$ e interpretar el resultado.

(c) Una pieza arqueológica ha estado enterrada durante 20.000 años al cabo de los cuales se han observado 10^{10} radionucleidos de C^{14}. Estimar por el método de los momentos el número inicial de radionucleidos N y calcular la media y la varianza del estimador obtenido.

(d) Determinar el tiempo que debe transcurrir para que el número de radionucleidos iniciales se reduzca a la mitad.