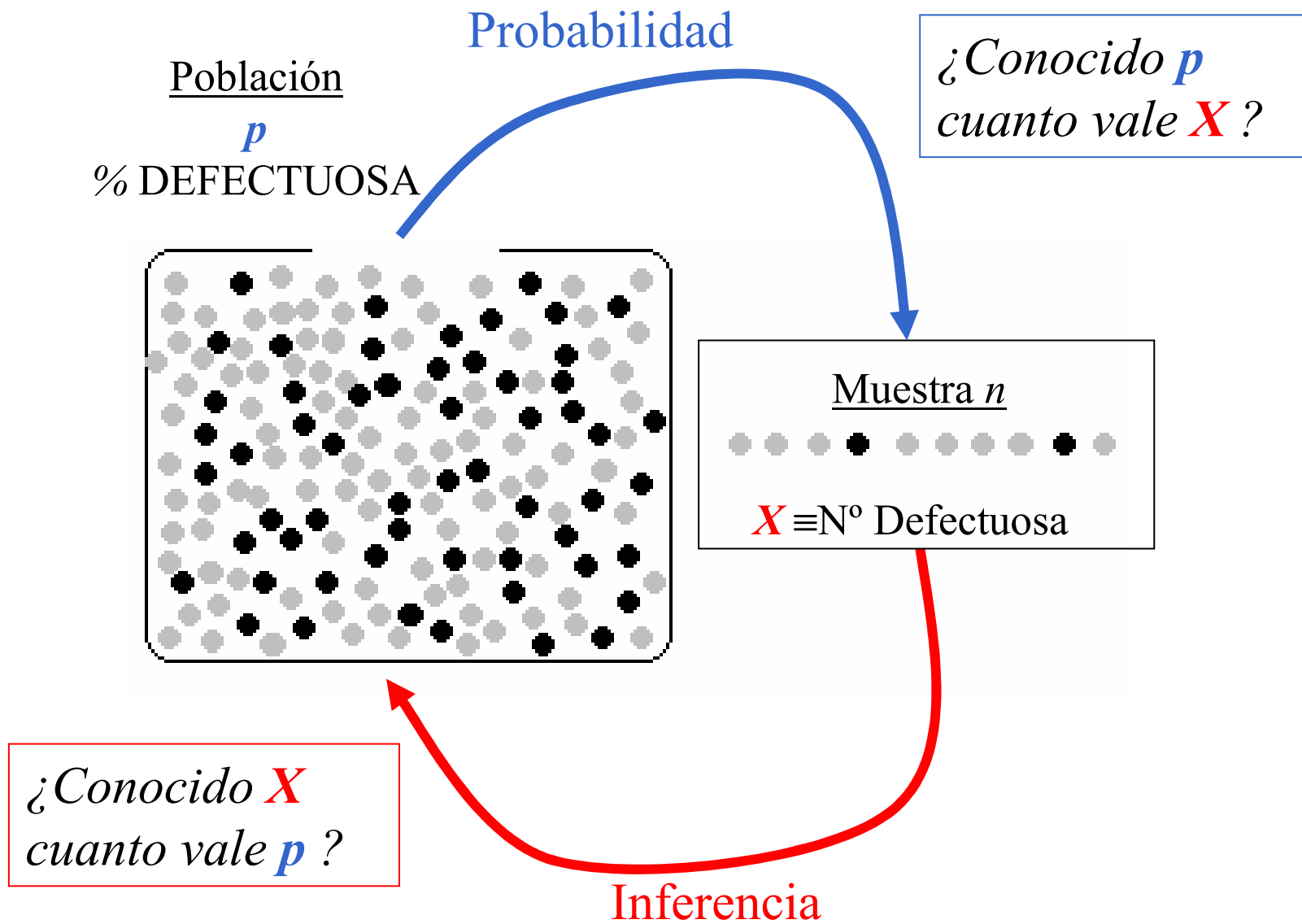
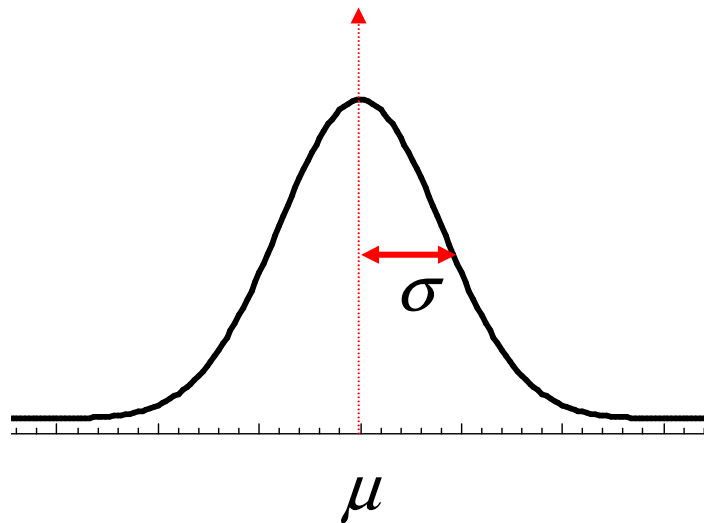

5. Estimación puntual

Curso 2011-2012

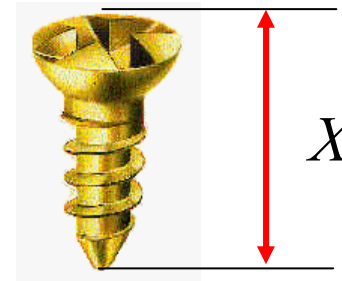
Estadística





$$X \rightarrow N(\mu, \sigma)$$

Parámetros
¿ μ, σ ?



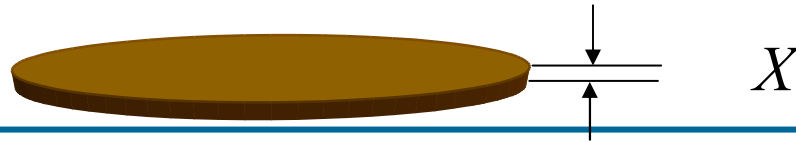
MUESTRA n

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

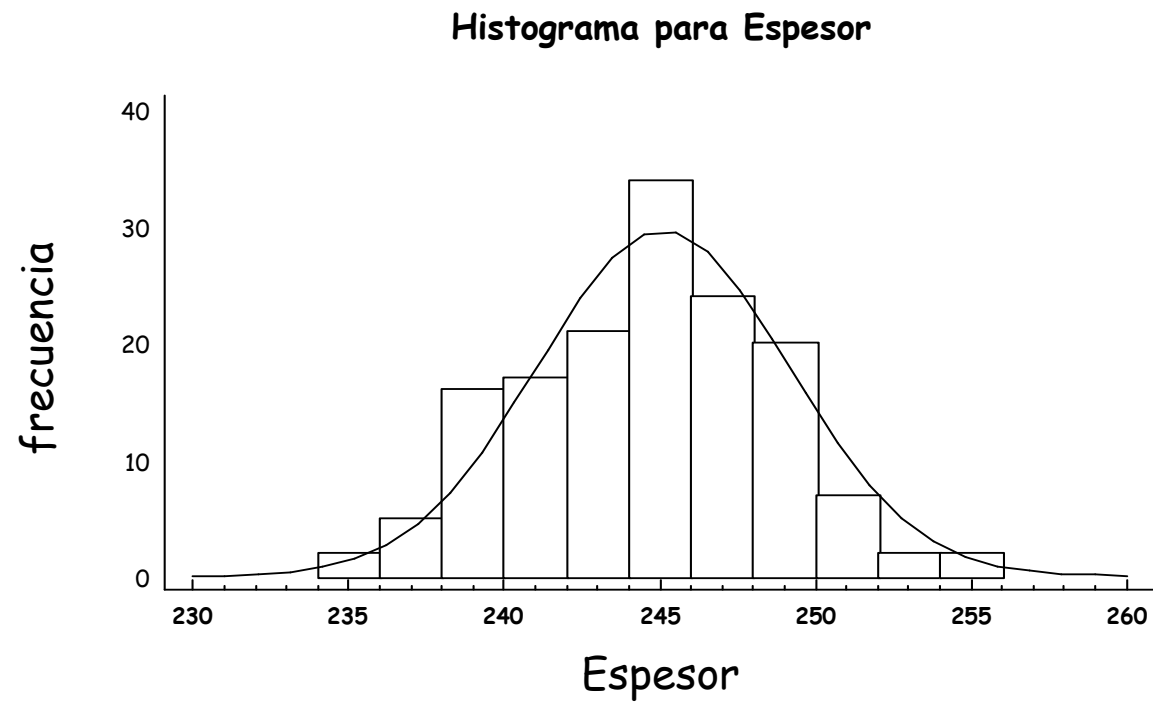
Datos Conocidos

?

Espesores de 150 obleas de Silicio (micras)



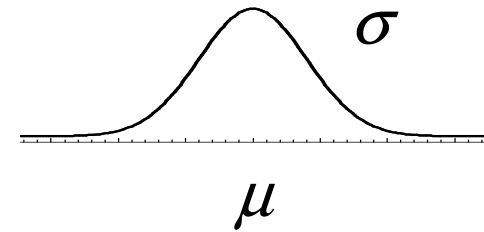
240	235	240	240	247	237	243	242	236	239
243	237	243	242	245	239	245	245	239	240
250	246	244	246	255	242	248	248	241	242
253	249	249	249	250	247	251	251	246	243
248	246	246	248	249	245	250	249	242	244
238	240	245	240	237	242	244	242	243	239
242	241	250	243	239	244	246	245	246	240
245	246	250	246	243	246	246	248	247	250
251	247	247	250	247	251	250	243	252	252
247	249	248	248	246	248	246	246	247	250
239	240	238	241	242	243	241	241	241	241
242	243	240	245	244	245	239	244	243	243
246	244	245	243	245	247	244	245	245	249
250	248	248	247	248	252	250	249	248	255
248	245	246	245	245	249	246	247	246	253



Distintos problemas de inferencia

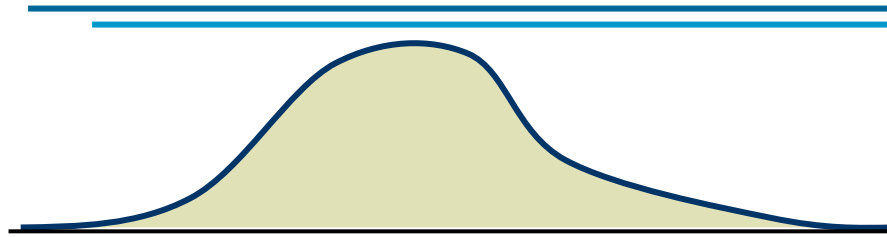
Dado un *modelo* para los datos:

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$



- *Estimar μ y σ*
- *Dar un intervalo de confianza para μ y σ*
- *Elegir entre (contraste de hipótesis):*
$$\mu \geq 250 \quad \text{o} \quad \mu < 250$$
- *Comprobar la validez del modelo (contraste de bondad de ajuste).*

Métodos de Estimación



$$X \rightarrow f_X(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$$

f_X conocida

Parámetros desconocidos

$$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$$

Dada una muestra aleatoria simple de X

$$x_1, x_2, \dots, x_n \rightarrow \text{¿} \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r \text{?}$$

1. Método de los momentos

2. Método de máxima verosimilitud

Métodos de los momentos

DATOS

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$

$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$

$$a_2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}$$

$$\vdots$$

$$a_r = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^r}{n}$$

VAR. ALEATORIA

$$f_X(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$$

$$\alpha_1 = E[X] = g_1(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$$

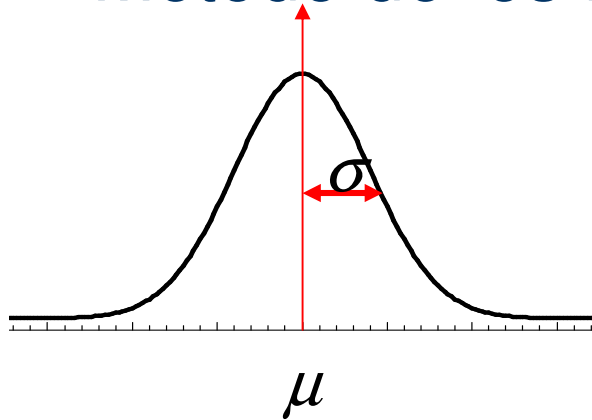
$$\alpha_2 = E[X^2] = g_2(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$$

$$\vdots$$

$$\alpha_r = E[X^r] = g_r(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$$

$$\begin{array}{l} \text{Estimadores} \\ \hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_r \end{array} \rightarrow \begin{cases} g_1(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_r) = a_1 \\ g_2(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_r) = a_2 \\ \vdots \\ g_r(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_r) = a_r \end{cases}$$

Método de los momentos: Distribución normal



$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}, \quad x \in \mathbb{R}$$

Parámetros : ¿ μ, σ ?

$$x_1, x_2, \dots, x_n$$
$$a_1 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n}$$
$$a_2 = \frac{\sum_{i=1}^n x_i^2}{n}$$

$$f_X(x, \mu, \sigma)$$

$$\alpha_1 = E[X] = \mu$$

$$\alpha_2 = E[X^2] = \sigma^2 + \mu^2$$

$$\hat{\mu} = \bar{x}$$
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i^2 - \bar{x}^2 = s^2$$

Método de máxima verosimilitud (Introducción)

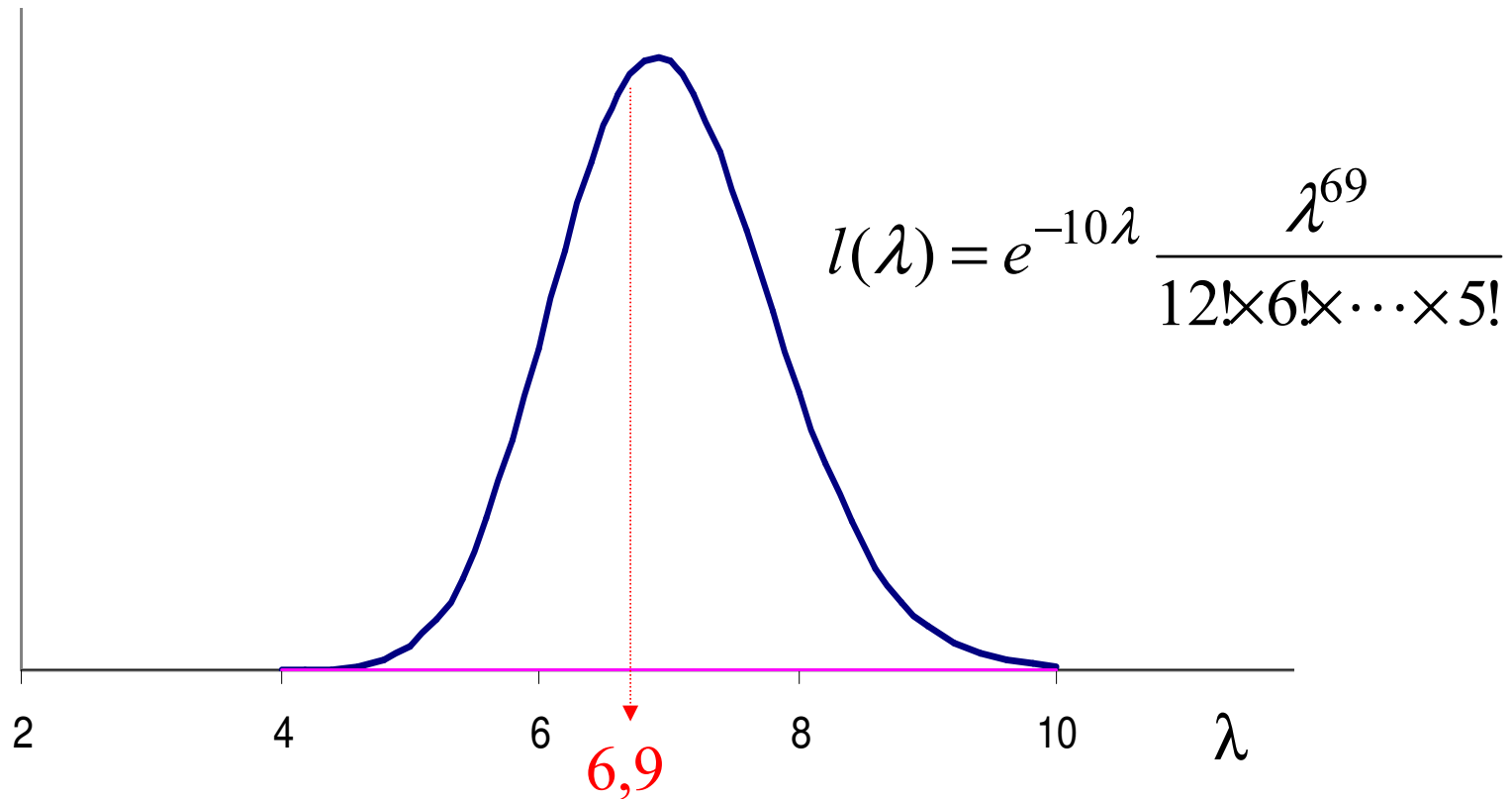
Una fuente radiactiva emite partículas según un proceso de Poisson con media λ desconocida. Durante 10 minutos se han contado el número de partículas emitidas:

12, 6, 11, 3, 8, 5, 3, 9, 7, 5

$$\begin{aligned} P(X_1 = 12, X_2 = 6, \dots, X_{10} = 5) &= e^{-\lambda} \frac{\lambda^{12}}{12!} \times e^{-\lambda} \frac{\lambda^6}{6!} \times \dots \times e^{-\lambda} \frac{\lambda^5}{5!} \\ &= e^{-10\lambda} \frac{\lambda^{12+6+\dots+5}}{12! \times 6! \times \dots \times 5!} = e^{-10\lambda} \frac{\lambda^{69}}{12! \times 6! \times \dots \times 5!} \end{aligned}$$

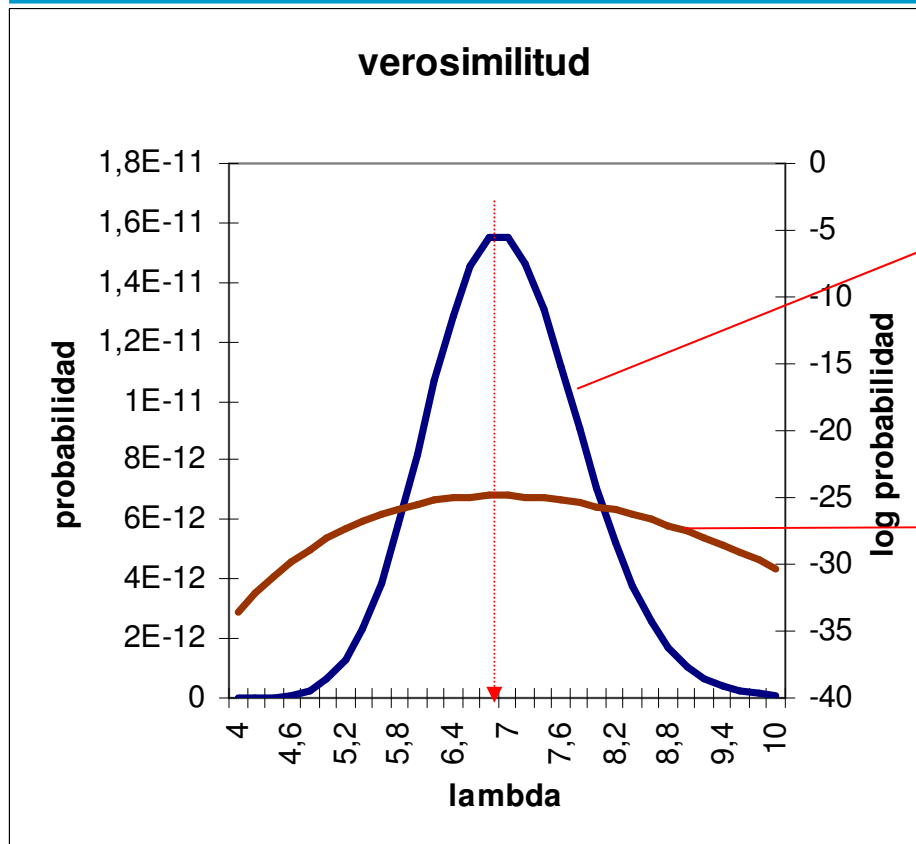
$$l(\lambda) = e^{-10\lambda} \frac{\lambda^{69}}{12! \times 6! \times \dots \times 5!}$$

Función de verosimilitud



Estimador máximo-verosímil: $\hat{\lambda} = 6,9$

Función de verosimilitud



$$l(\lambda) = e^{-10\lambda} \frac{\lambda^{69}}{12 \times 6! \times \dots \times 5!}$$

$$L(\lambda) = \log l(\lambda)$$

Estimador máximo-verosímil: $\hat{\lambda} = 6,9$

Estimación por máxima verosimilitud

$$X \rightarrow f_X(x, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$$

f_X conocida

Parámetros desconocidos: $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r$

Muestra aleatoria simple: $X_1, X_2, \dots, X_n$

Distribución conjunta:

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n; \theta_1, \dots, \theta_r) &= \\ &= f_X(x_1, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r) f_X(x_2, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r) \cdots f_X(x_n, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r) \end{aligned}$$

$$\log f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=1}^n \log f_X(x_i, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r) = L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$$

$$\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_r \Rightarrow L(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \dots, \hat{\theta}_r) = \max L(\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_r)$$

Máx. verosimilitud: Distribución normal

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right\}, \quad x \in \Re \quad \text{Parámetros: } \mu, \sigma?$$

$X_1, X_2, \dots, X_n$: muestra aleatoria simple

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2, \dots, x_n) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_1-\mu)^2} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_2-\mu)^2} \dots \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x_n-\mu)^2} \\ &= \frac{1}{(2\pi)^{n/2} \sigma^n} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} L(\mu, \sigma^2) &= \log f(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &= -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{n}{2} \log \sigma^2 - \frac{1}{2\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 \end{aligned}$$

$$\max L : \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial L}{\partial \mu} = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \sigma^2} = -\frac{n}{2\sigma^2} + \frac{1}{2\sigma^4} \sum_{i=1}^n (x_i - \mu)^2 = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \hat{\mu} = \bar{x} \\ \hat{\sigma}^2 = s^2 \end{array} \right.$$

Máx. Verosimilitud: Poisson

$$P(X = x) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^x}{x!}, x = 0, 1, 2, \dots \rightarrow \text{Parámetro } \lambda$$

Muestra aleatoria simple: $x_1, x_2, \dots, x_n$

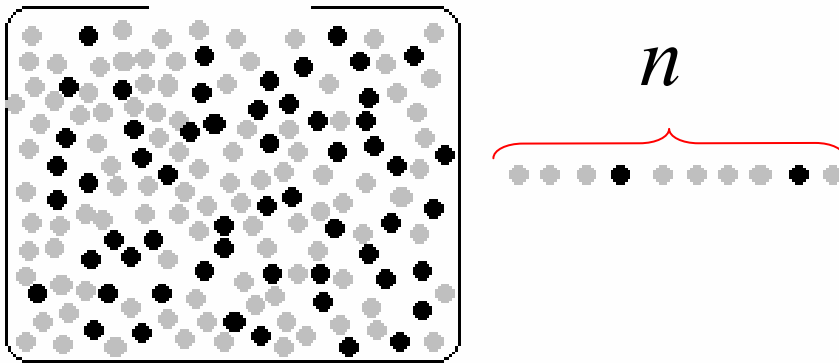
$$\begin{aligned} p(x_1, x_2, \dots, x_n) &= P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) \\ &= e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_1}}{x_1!} e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_2}}{x_2!} \dots e^{-\lambda} \frac{\lambda^{x_n}}{x_n!} = e^{-\lambda n} \frac{\lambda^{\sum x_i}}{x_1! x_2! \dots x_n!} \end{aligned}$$

$$L(\lambda) = -\lambda n + (\sum x_i) \log \lambda - \sum \log x_i!$$

$$\max L(\lambda) : \frac{dL(\lambda)}{d\lambda} = -n + \frac{\sum x_i}{\hat{\lambda}} = 0 \Rightarrow \hat{\lambda} = \bar{x}$$

Máx. verosimilitud: Binomial(n, p)

Proporción defectuosas = ¿ p ?



Muestra (Bernoulli) :

$x_1, x_2, \dots, x_n$

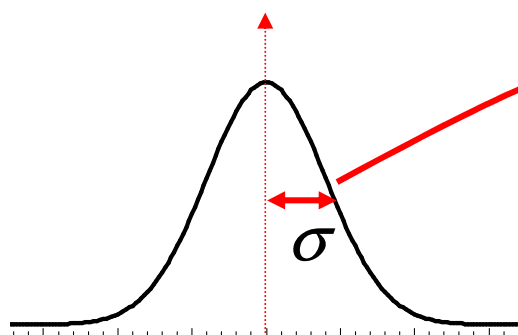
$$x_i = \begin{cases} 0 & \text{si es Aceptable} \\ 1 & \text{si es Defectuosa} \end{cases}$$

$$\begin{aligned} p(x_1, x_2, \dots, x_n) &= P(X_1 = x_1, X_2 = x_2, \dots, X_n = x_n) \\ &= P(X_1 = x_1)P(X_2 = x_2) \cdots P(X_n = x_n) \\ &= p^{\sum x_i} (1-p)^{n-\sum x_i} \\ &= p^r (1-p)^{n-r} \quad \text{donde } r = \sum x_i \text{ es el n}^\circ \text{ de defectuosas} \end{aligned}$$

$$L(p) = r \log p + (n-r) \log(1-p)$$

$$\frac{dL(p)}{dp} = \frac{r}{\hat{p}} - \frac{n-r}{1-\hat{p}} = 0 \quad \rightarrow \quad \hat{p} = \frac{r}{n}$$

Distribución de media (normal)



$$X \rightarrow N(\mu, \sigma)$$

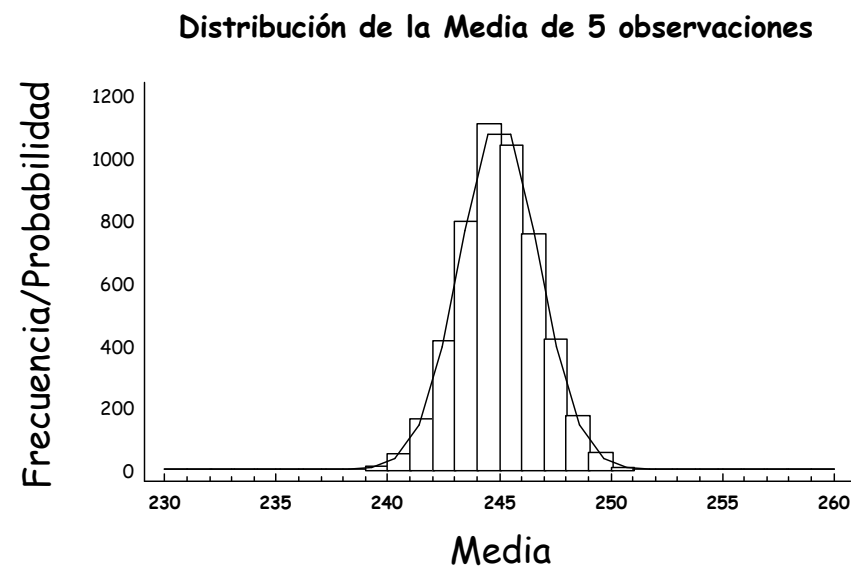
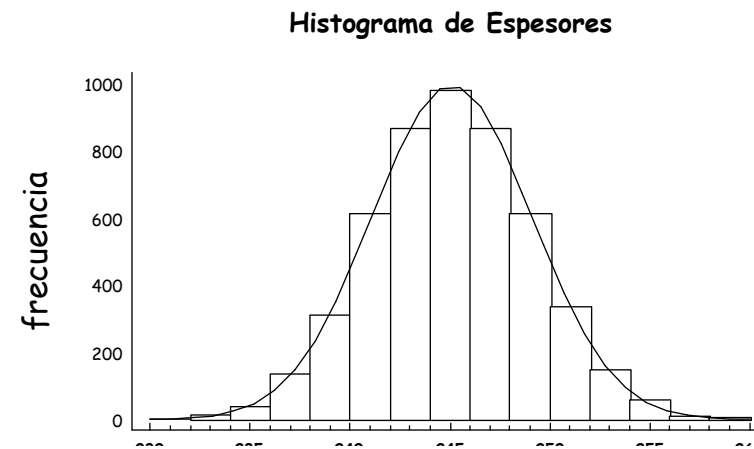
$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

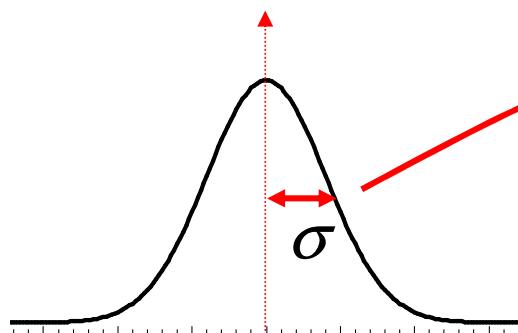
$$E[\bar{X}] = \frac{E[X_1] + E[X_2] + \dots + E[X_n]}{n} = \frac{\mu + \mu + \dots + \mu}{n} = \mu$$

$$\text{Var}[\bar{X}] = \frac{\text{Var}[X_1] + \text{Var}[X_2] + \dots + \text{Var}[X_n]}{n^2} = \frac{\sigma^2 + \sigma^2 + \dots + \sigma^2}{n^2} = \frac{\sigma^2}{n}$$

$$\bar{X} \rightarrow N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$



Distribución de S^2 (Normal)



$$X \rightarrow N(\mu, \sigma)$$

$$X_1, X_2, \dots, X_n$$

$$S^2 = \frac{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2}{n}$$

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i^2 - \bar{X}^2$$

$$E[S^2] = \frac{1}{n} \sum E[X_i^2] - E[\bar{X}^2] = \frac{1}{n} \sum (\sigma^2 + \mu^2) - \left(\frac{\sigma^2}{n} + \mu^2 \right) = \frac{n-1}{n} \sigma^2$$

$$\hat{S}^2 = \frac{(X_1 - \bar{X})^2 + (X_2 - \bar{X})^2 + \dots + (X_n - \bar{X})^2}{n-1}$$

$$\hat{S}^2 = \frac{n}{n-1} S^2 \Rightarrow E[\hat{S}^2] = \sigma^2$$

Distribución χ^2

$Z_1, Z_2, \dots, Z_n \rightarrow N(0,1)$ independientes

$$Z_1^2 + Z_2^2 + \dots + Z_n^2 \rightarrow \chi_n^2$$

Propiedades

⊗ $E[\chi_n^2] = n$

⊗ $\text{Var}[\chi_n^2] = 2n$

⊗ $\chi_n^2 + \chi_m^2 = \chi_{n+m}^2$ (χ_n^2 y χ_m^2 indep.)

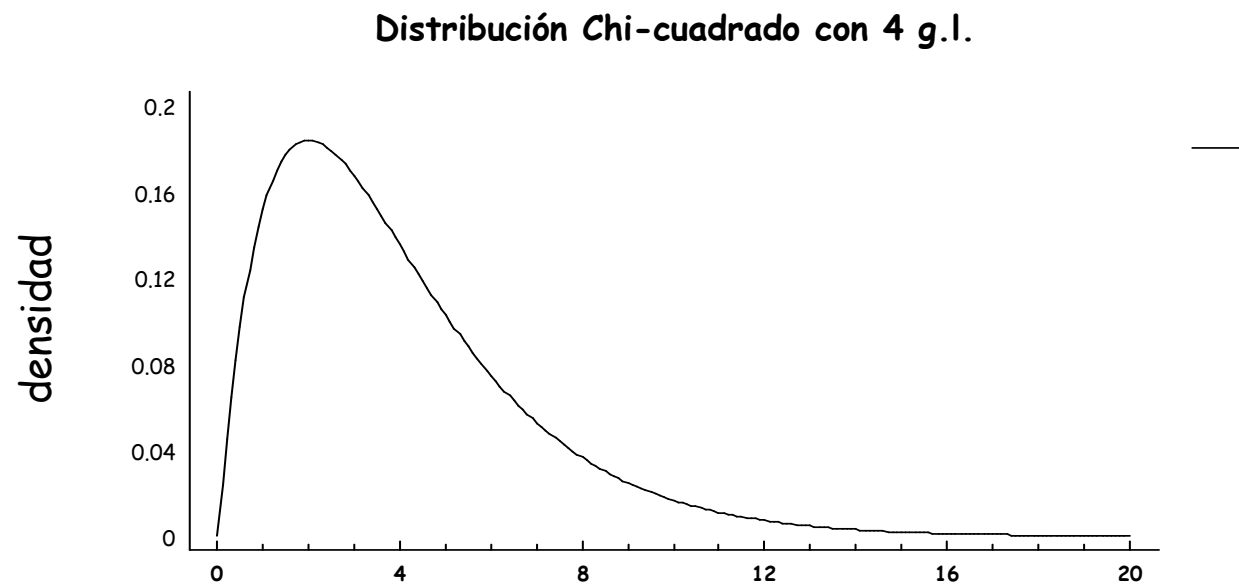
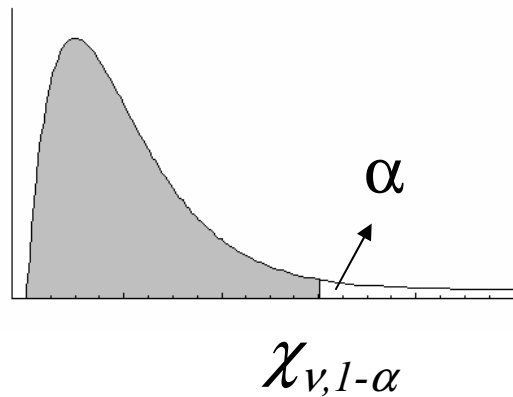


Tabla χ^2



v: grados de libertad (g.l.)

EJEMPLO

$$P(\chi_9 \geq 19,02) = 0,025$$

Estimación puntual

g.l.	0,995	0,990	0,975	0,950	0,500	0,050	0,025	0,010	0,005
1	,00004	,00016	,00098	,00393	0,455	3,841	5,024	6,635	7,879
2	,01002	,0201	0,051	0,103	1,386	5,991	7,378	9,210	10,60
3	,0717	0,115	0,216	0,352	2,366	7,815	9,348	11,34	12,84
4	0,207	0,297	0,484	0,711	3,357	9,488	11,14	13,28	14,86
5	0,412	0,554	0,831	1,145	4,351	11,07	12,83	15,09	16,75
6	0,676	0,872	1,237	1,635	5,348	12,59	14,45	16,81	18,55
7	0,989	1,239	1,690	2,167	6,346	14,07	16,01	18,48	20,28
8	1,344	1,647	2,180	2,733	7,344	15,51	17,53	20,09	21,95
9	1,735	2,088	2,700	3,325	8,343	16,92	19,02	21,67	23,59
10	2,156	2,558	3,247	3,940	9,342	18,31	20,48	23,21	25,19
11	2,603	3,053	3,816	4,575	10,341	19,68	21,92	24,73	26,76
12	3,074	3,571	4,404	5,226	11,340	21,03	23,34	26,22	28,30
13	3,565	4,107	5,009	5,892	12,340	22,36	24,74	27,69	29,82
14	4,075	4,660	5,629	6,571	13,339	23,68	26,12	29,14	31,32
15	4,601	5,229	6,262	7,261	14,339	25,00	27,49	30,58	32,80
16	5,142	5,812	6,908	7,962	15,338	26,30	28,85	32,00	34,27
17	5,697	6,408	7,564	8,672	16,338	27,59	30,19	33,41	35,72
18	6,265	7,015	8,231	9,390	17,338	28,87	31,53	34,81	37,16
19	6,844	7,633	8,907	10,117	18,338	30,14	32,85	36,19	38,58
20	7,434	8,260	9,591	10,851	19,337	31,41	34,17	37,57	40,00
21	8,034	8,897	10,283	11,591	20,337	32,67	35,48	38,93	41,40
22	8,643	9,542	10,982	12,338	21,337	33,92	36,78	40,29	42,80
23	9,260	10,196	11,689	13,091	22,337	35,17	38,08	41,64	44,18
24	9,886	10,856	12,401	13,848	23,337	36,42	39,36	42,98	45,56
25	10,520	11,524	13,120	14,611	24,337	37,65	40,65	44,31	46,93
26	11,160	12,198	13,844	15,379	25,336	38,89	41,92	45,64	48,29
27	11,808	12,878	14,573	16,151	26,336	40,11	43,19	46,96	49,65
28	12,461	13,565	15,308	16,928	27,336	41,34	44,46	48,28	50,99
29	13,121	14,256	16,047	17,708	28,336	42,56	45,72	49,59	52,34
30	13,787	14,953	16,791	18,493	29,336	43,77	46,98	50,89	53,67
40	20,707	22,164	24,433	26,509	39,335	55,76	59,34	63,69	66,77
50	27,991	29,707	32,357	34,764	49,335	67,50	71,42	76,15	79,49
60	35,534	37,485	40,482	43,188	59,335	79,08	83,30	88,38	91,95
70	43,275	45,442	48,758	51,739	69,334	90,53	95,02	100,43	104,21
80	51,172	53,540	57,153	60,391	79,334	101,88	106,63	112,33	116,32
90	59,196	61,754	65,647	69,126	89,334	113,15	118,14	124,12	128,30
100	67,328	70,065	74,222	77,929	99,334	124,34	129,56	135,81	140,17
120	83,852	86,923	91,573	95,705	119,334	146,57	152,21	158,95	163,65

Distribución de S^2 (Normal)

$$\sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \mu}{\sigma} \right)^2 \rightarrow \chi_n^2$$

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2 &= \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X} + \bar{X} - \mu)^2 \\ &= \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 + \sum_{i=1}^n (\bar{X} - \mu)^2 + 2 \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(\bar{X} - \mu) \\ &= \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 + n(\bar{X} - \mu)^2 \end{aligned}$$

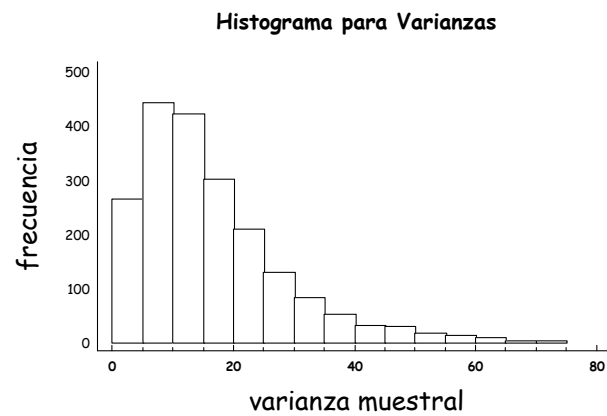
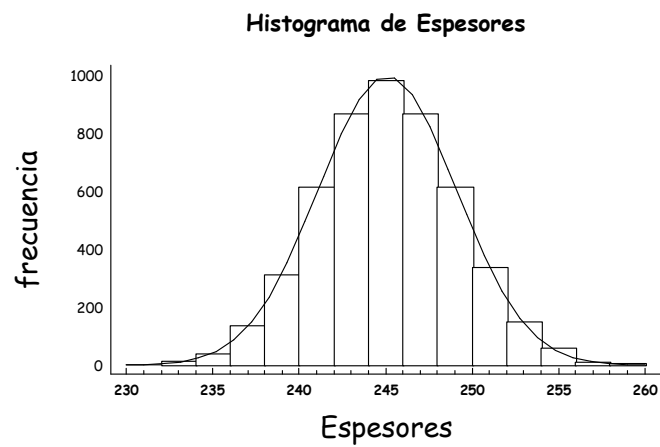
$$\frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \mu)^2}{\sigma^2} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}{\sigma^2} + \frac{(\bar{X} - \mu)^2}{\sigma^2/n}$$

$\downarrow \chi_n^2$ $\downarrow \chi_{n-1}^2$ $\downarrow \chi_1^2$

Distribución de S^2 (Normal)

$$\frac{nS^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 \xrightarrow{dist} \chi_{n-1}^2$$

$$\frac{(n-1)\hat{S}^2}{\sigma^2} = \sum_{i=1}^n \left(\frac{X_i - \bar{X}}{\sigma} \right)^2 \xrightarrow{dist} \chi_{n-1}^2$$



Distribución de la media (general)

$$X_i \rightarrow f(x, \theta) : \text{Var}[X_i] < \infty$$

$\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$, $\rightarrow$ Vector de n variables aleatorias independientes

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n}$$

$$E[\bar{X}] = \frac{E[X_1] + E[X_2] + \dots + E[X_n]}{n}$$

$$\text{Var}[\bar{X}] = \frac{\text{Var}[X_1] + \text{Var}[X_2] + \dots + \text{Var}[X_n]}{n^2}$$

Si las variables tienen la misma media y varianza

$$\mu = E[X_i] \quad \forall i \quad \sigma^2 = \text{Var}[X_i] \quad \forall i$$

$$\bar{X} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \Rightarrow \begin{cases} E[\bar{X}] = \mu \\ \text{Var}[\bar{X}] = \frac{\sigma^2}{n} \end{cases} \Rightarrow \bar{X} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N\left(\mu, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

Binomial

Binomial: $X_1, X_2, \dots, X_n$

$$X_i = \begin{cases} 0 & \text{si es Aceptable} \\ 1 & \text{si es Defectuosa} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} E[X_i] = p \\ \text{Var}[X_i] = p(1-p) \end{cases}$$

$$\hat{p} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \rightarrow \begin{cases} E[\hat{p}] = p \\ \text{Var}[\hat{p}] = \frac{p(1-p)}{n} \end{cases}$$

$$\hat{p} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N\left(p, \sqrt{\frac{p(1-p)}{n}}\right)$$

Poisson

Poisson : $X_1, X_2, \dots, X_n$

$$P(X_i = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \Rightarrow \begin{cases} E[X_i] = \lambda \\ \text{Var}[X_i] = \lambda \end{cases}$$

$$\hat{\lambda} = \frac{X_1 + X_2 + \dots + X_n}{n} \rightarrow \begin{cases} E[\hat{\lambda}] = \lambda \\ \text{Var}[\hat{\lambda}] = \frac{\lambda}{n} \end{cases}$$

$$\hat{\lambda} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} N\left(\lambda, \sqrt{\frac{\lambda}{n}}\right)$$

Propiedades de los estimadores

$X_1, X_2, \dots, X_n$ m.a.s de $f(x, \theta) : \hat{\theta} \equiv \hat{\theta}(X_1, X_2, \dots, X_n)$

- Centrados: $E[\hat{\theta}] = \theta$ (Sesgo $[\hat{\theta}] = E[\hat{\theta}] - \theta$)
- Varianza mínima: $\forall \hat{\theta}': \text{Var}[\hat{\theta}] \leq \text{Var}[\hat{\theta}']$
- *Error cuadrático medio* mínimo

$$\begin{aligned}\text{ECM}[\hat{\theta}] &= E[(\hat{\theta} - \theta)^2] \\ &= \text{Sesgo}^2(\hat{\theta}) + \text{Var}(\hat{\theta})\end{aligned}$$

- Consistentes

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[\hat{\theta}] = \theta \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}[\hat{\theta}] = 0$$

Ejemplo 1

$$X_1, X_2, \dots, X_n \text{ m.a.s de } N(\mu, \sigma) : \bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$$

Es centrado : $E[\bar{X}] = \mu$

Es de varianza mínima

Es consistente :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[\bar{X}] = \mu \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}[\bar{X}] = 0$$

Ejemplo 2

$$X_1, X_2, \dots, X_n \text{ m.a.s de } N(\mu, \sigma) : S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2$$

$$\text{No es centrado : } E[S^2] = \frac{n-1}{n} \sigma^2$$

$$\text{Sesgo}(S^2) = -\frac{\sigma^2}{n}$$

Varianza :

$$\text{Var} \left[\frac{nS^2}{\sigma^2} \right] = \text{Var} [\chi_{n-1}^2] = 2(n-1) \Rightarrow \text{Var}[S^2] = \frac{2(n-1)}{n^2} \sigma^4$$

Es consistente :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E[S^2] = \sigma^2 \quad \text{y} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}[S^2] = 0$$

Ejercicios propuestos

Capítulo 5. Estimación Puntual

5.1 La variable aleatoria X tiene distribución binomial con parámetros n y p , ambos desconocidos. Si $\{16, 18, 22, 25, 27\}$ es una muestra aleatoria simple de la distribución anterior, estimar por el método de los momentos n y p .

5.2 Los taxis en servicio de una ciudad están numerados del 1 al N . Se observa una muestra de 10 taxis y se apuntan sus números. Obtener un estimador de N por el método de los momentos.

5.3 Una variable aleatoria discreta puede tomar los valores 0, 1 y 2 con probabilidades $1.5/\theta$, $2.5/\theta$ y $(\theta - 4)/\theta$ respectivamente. Se toma una muestra de tamaño 25 con los resultados siguientes (la segunda fila corresponde a la fracción observada O_i para 0, 1 y 2).

x	0	1	2
O_i	17	5	3

Estimar θ por máxima verosimilitud.

5.4 Se ha tomado una muestra de tamaño 10 del tiempo, en minutos, entre el paso de dos autobuses T en una parada con los siguientes resultados: 9, 10, 6, 4, 15, 6, 1, 5, 4, 10.

Si la función de distribución del tiempo de paso es $F(t) = 1 - \exp(-\alpha t)$, calcular la probabilidad estimada de esperar al autobús más de 10 minutos.

5.5 La función de distribución de una variable aleatoria es

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0, \\ (x/\beta)^\alpha & 0 \leq x \leq \beta, \\ 1 & x > \beta. \end{cases}$$

donde los parámetros α y β son positivos. Estimar los parámetros de la distribución por el método de máxima verosimilitud.

5.6 El club de tiro de una determinada ciudad está estudiando la distancia X del punto de impacto del proyectil al centro de la diana de sus 13 mejores tiradores.

Sabiendo que la función de densidad de la variable aleatoria presentada es

$$f(x) = \frac{2x}{\theta^2} \exp\left[-\frac{x^2}{\theta^2}\right], \quad x \geq 0, \theta \geq 0,$$

estimar θ si la distancia en cm al blanco de 10 tiradores fue

2,1 3,2 6,3 5,4 2,2 6,9 7,1 6,6 2,5 9,1

y la distancia de los otros tres fue mayor que la distancia máxima permitida en su categoría que es de 11 cm .

- 5.7 Una compañía, para determinar el número de consumidores de un determinado producto en Madrid, ha encuestado a personas elegidas al azar hasta encontrar a 20 que utilicen el producto. Estimar por máxima verosimilitud la proporción de consumidores en la ciudad si el número total de entrevistados ha sido 115
- 5.8 Se supone que el tiempo que tarda un paciente en recuperarse totalmente de una dolencia cuando se le aplica el tratamiento A es una variable aleatoria exponencial. Si al observar a 20 pacientes, al cabo de 20 días 15 no se han recuperado, mientras que los 5 restantes tardaron 17, 15, 19, 18 y 17 días en hacerlo, estime por máxima verosimilitud el tiempo medio hasta la recuperación total.
- 5.9 El tiempo de duración de ciertos componentes electrónicos es una variable aleatoria con distribución exponencial. Se ha realizado un ensayo con 10 componentes cuyos tiempos de duración han sido: 37, 45, 92, 104, 109, 200, 295. Después de 400 horas, tres componentes seguían funcionando. Con esta información, estimar por máxima verosimilitud el parámetro de la distribución exponencial.
- 5.10 Sea $X_1, X_2, \dots, X_n$ una muestra aleatoria simple de la función de densidad

$$f(x) = 2(\theta - x)/\theta^2, \quad 0 \leq x \leq \theta.$$

Obtener por el método de los momentos un estimador insesgado de θ y calcular su varianza.

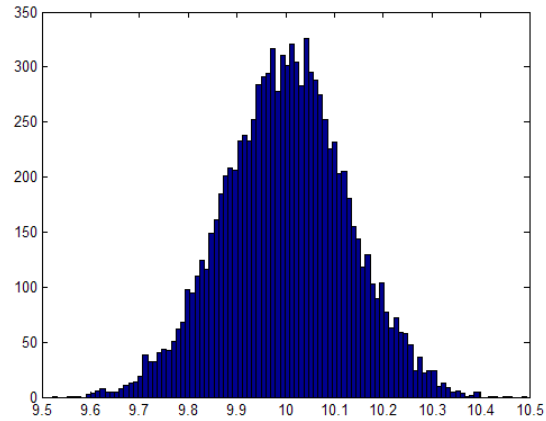
- 5.11 Sea $\bar{X}$ la media aritmética de una muestra aleatoria simple de una distribución $N(\mu, \sigma)$. Se define $\hat{X} = c\bar{X}$ como nuevo estimador para μ . Determinar c (en función de μ y σ) para que el nuevo estimador tenga Error Cuadrático Medio (ECM) mínimo. Calcular c si se sabe que el coeficiente de variación $\sigma/\mu = 2$.
- 5.12 $X_1, X_2, \dots, X_n$ es una muestra aleatoria simple de una distribución normal con parámetros desconocidos. Para estimar la varianza se propone el siguiente estimador

$$S^2 = k \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (X_i - X_j)^2.$$

Determinar k para que el estimador sea centrado.

- 5.13 Para estimar la media σ^2 de una población normal se utiliza el estimador $\hat{\sigma}^2 = k\hat{s}^2$, siendo $\hat{s}^2$ la varianza muestral corregida y k una constante. Calcular el valor de k que minimiza el error cuadrático medio. (Utilizar $\text{Var}[\chi_g^2] = 2g$, siendo g el número de grados de libertad).
- 5.14 Los tiempos de funcionamiento de dos componentes electrónicos distintos siguen distribuciones exponenciales con esperanzas μ y 2μ . Se han obtenido los tiempos de fallo de una muestra de cada tipo de componente, en ambos casos de tamaño n . Obtener el estimador de máxima verosimilitud de μ , calcular su media y su varianza.
- 5.15 Un sistema de lectura telemática de consumo de energía eléctrica emplea un mensaje de 128-bit. Ocasionalmente las interferencias aleatorias provocan que un bit se invierta produciéndose un error de transmisión. Se acepta que la probabilidad de que cada bit cambie en una transmisión es constante e igual a p , y que los cambios son independientes. Estima el valor de p si se ha comprobado que de las últimas 10000 lecturas efectuadas (todas de 128-bit) 340 eran erróneas.
- 5.16 Un estudiante ha realizado el siguiente ejercicio de simulación. Ha tomado generado con STAT-GRAPHICS 100 observaciones de una normal de media 10 y desviación típica 1. Para estos 100

datos ha obtenido la mediana y la ha denominado M_1 . Ha repetido el mismo proceso $n=10000$ veces. De forma que ha obtenido $M_1, M_2, \dots, M_n$. En el gráfico se muestra el histograma de estos 10000 valores, que tienen media 10.002 y desviación típica 0.1266.



A partir de esta simulación, explica qué propiedades tiene la mediana como estimador de la media de una distribución normal, sus ventajas e inconvenientes.