2. Probabilidad y variable aleatoria

Curso 2011-2012

Estadística

---

2. 1 Probabilidad

Experimento Aleatorio

EL término "**experimento aleatorio**" se utiliza en la teoría de la probabilidad para referirse a un proceso cuyo resultado no es conocido de antemano con certeza.

"Suma de valores en el lanzamiento de 2 dados."

Ejemplos

- Número de piezas defectuosas en una muestra de 100 piezas.
- Número de llamadas a una centralita telefónica en un día.
- Energía eléctrica consumida en Madrid durante un periodo de tiempo.

Espacio Muestral

Conjunto formado por todos los posibles resultados de un experimento aleatorio.

- DISCRETOS:
  - Lanzamiento de un DADO: S = {1,2,3,4,5,6}
  - Piezas defectuosas en una muestra de 100

    S = {0,1,2,...,100}
  - Llamadas a una centralita durante un día

    S = {0,1,2,3,...,∞}
- CONTINUOS:
  - Energía consumida en Madrid: S={[0, ∞)}

Suceso

Cualquier subconjunto del espacio muestral.

- "Obtener un número par al lanzar un dado":

  A = {2,4,6}
- "Observar menos de 5 piezas defectuosas en una muestra de 100": B = {0,1,2,3,4}
- "Tener más de 50 llamadas de teléfono en una hora": C = {51,52,...,∞}
- "Tener una demanda de energía eléctrica entre 300 Mwh y 400 Mwh" : D =(300,400)

Operaciones

Sean *A* y *B* dos subconjuntos de *S*

- Unión

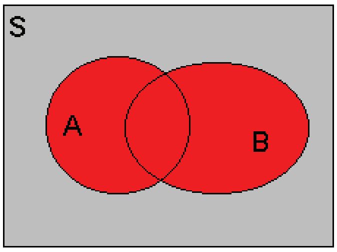
$$A \cup B = \{x : (x_{\overline{A}} \in A) \textbf{ o } (x \in B)\}$$

- Intersección

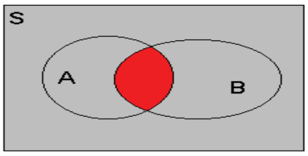
$$A \cap B = \{x : (x \in A) \textbf{ y } (x \in B)\}$$

- Complementario

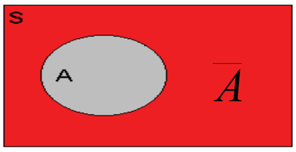
$$\overline{A} = \{x : x \notin A\}$$



$A \cup B$



$A \cap B$



Propiedades

Dados tres sucesos A,B y C de un espacio muestral S

$$\text{Conmutativa}: \begin{cases} A \cup B = B \cup A \\ A \cap B = B \cap A \end{cases}$$

$$\text{Asociativa}: \begin{cases} A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \\ A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \end{cases}$$

$$\text{Distributiva}: \begin{cases} A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \\ A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \end{cases}$$

$$\text{Leyes de De Morgan}: \begin{cases} \overline{\mathrm{A} \cup \mathrm{B}} = \overline{A} \cap \overline{B} \\ \overline{\mathrm{A} \cap \mathrm{B}} = \overline{A} \cup \overline{B} \end{cases}$$

Axiomas de Probabilidad

Dado un espacio muestral S, una función de probabilidad asigna valores P(A) a cada suceso $\mathrm{A} \subset \mathrm{S}$ y satisface :

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(S) = 1$
3. Para una secuencia de sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$

que cumplen $A_i \cap A_j = \varnothing$ cuando $i \neq j$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Problema fundamental

- Dado un espacio muestral discreto con resultados $A_1, A_2, ..., A_n$, el experimento aleatorio queda caracterizado si asignamos un valor $P(A_i)$ no negativo a cada resultado A_i de forma que

$$P(A_1)+P(A_2)+ ...+P(A_n)=1.$$

- **Ejemplo**. Se lanza dos veces una moneda.

$$\{XX,XC,CX,CC\}$$

Se asigna probabilidad 1/4 a cada uno de los cuatro resultados.

¿ Es una asignación correcta?

Propiedades elementales

1. $P(\varnothing) = 0.$
2. $P(\overline{A}) = 1 - P(A).$
3. Si $A \subset B$ entonces $P(A) \leq P(B).$
4. Para dos sucesos cualesquiera $A, B \subset S,$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B).$$

5. Para n sucesos $A_1, A_2, ..., A_n \subset S,$

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i) - \sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i}^{n} P(A_i \cap A_j) +$$

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j>i}^{n} \sum_{k>j}^{n} P(A_i \cap A_j \cap A_k) + \cdots + (-1)^{n+1} P(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n)$$

Asignación de probabilidades

1. Clásica (Laplace): Equiprobabilidad

2. Frecuencialista (von Mises, 1931)

3. Subjetiva

Clásica: sucesos equiprobables

Sea un experimento con un número finito *N* de resultados excluyentes y equiprobables, la probabilidad del suceso A es

$$\boxed{P(A) = \frac{N(A)}{N},}$$

donde N es el número de resultados posibles del experimento y N(A) el número de resultados favorables al suceso A.

Ejemplos (equiprobabilidad)

- Lanzamiento de una moneda. S={C,X}

$$P(C) = \frac{1}{2}$$

- Lanzamiento de un dado. S={1,2,3,4,5,6}

$$P(\text{" Número}\quad\text{par "}) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}.$$

- Extracción de una de las 40 cartas de la baraja, S={1 Oros,2 Oros,...., Rey Bastos}

$$P(Bastos) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}.$$

Lanzamiento de dos dados

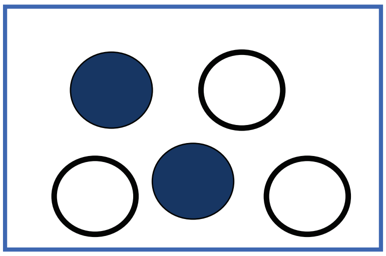
1er Dado

2º Dado

	1	2	3	4	5	6
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)	(6,1)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)	(6,2)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)	(6,3)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)	(6,4)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)	(6,5)
6	(1,6)	(2,6)	(3,6)	(4,6)	(5,6)	(6,6)

P(“suma 7”) = 6/36 = 1/6

Urna: 2 Negras y 3 Blancas



1ª Bola

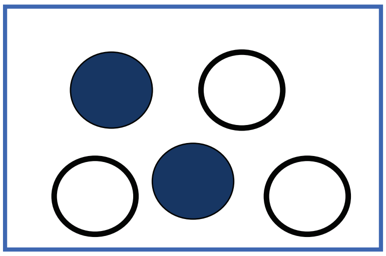
2ª Bola

	B1	B2	B3	N1	N2
B1	■	B2,B1	B3,B1	N1,B1	N2,B1
B2	B1,B2	■	B3,B2	N1,B2	N2,B2
B3	B1,B3	B2,B3	■	N1,B3	N2,B3
N1	B1,N1	B2,N1	B3,N1	■	N2,N1
N2	B1,N2	B2,N2	B3,N2	N1,N2	■

Se extraen dos bolas al azar, una detrás de otra, sin reposición.

P("1ª Blanca y 2ª Negra") = 6/20 = 3/10

Urna: 2 Negras y 3 Blancas



1ª Bola

2ª Bola

	B1	B2	B3	N1	N2
B1	B1,B1	B2,B1	B3,B1	N1,B1	N2,B1
B2	B1,B2	B2,B2	B3,B2	N1,B2	N2,B2
B3	B1,B3	B2,B3	B3,B3	N1,B3	N2,B3
N1	B1,N1	B2,N1	B3,N1	N1,N1	N2,N1
N2	B1,N2	B2,N2	B3,N2	N1,N2	N2,N2

Se extraen dos bolas al azar, una detrás de otra, **con reposición.**

P("1ª Blanca y 2ª Negra") = 6/25

Combinatoria: 5 objetos tomados de dos en dos

SIN REEMPLAZAMIENTO / **CON REEMPLAZAMIENTO**

IMPORTA EL ORDEN

SIN REEMPLAZAMIENTO

Primera extracción

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1		(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)
2	(1,2)		(3,2)	(4,2)	(5,2)
3	(1,3)	(2,3)		(4,3)	(5,3)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)		(5,4)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	

Número = 20

CON REEMPLAZAMIENTO

Primera Extracción

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	(1,1)	(2,1)	(3,1)	(4,1)	(5,1)
2	(1,2)	(2,2)	(3,2)	(4,2)	(5,2)
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)	(4,3)	(5,3)
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	(5,4)
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)

Número = 25

NO IMPORTA EL ORDEN

SIN REEMPLAZAMIENTO

Primera extracción

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1					
2	(1,2)				
3	(1,3)	(2,3)			
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)		
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	

Número = 10

CON REEMPLAZAMIENTO

Primera extracción

	1	**2**	**3**	**4**	**5**
1	(1,1)				
2	(1,2)	(2,2)			
3	(1,3)	(2,3)	(3,3)		
4	(1,4)	(2,4)	(3,4)	(4,4)	
5	(1,5)	(2,5)	(3,5)	(4,5)	(5,5)

Número = 15

Combinatoria: Número posible de reordenaciones de *n* objetos tomados de *r* en *r*

	SIN REEMPLAZAMENTO	CON REEMPLAZAMENTO
IMPORTA EL ORDEN	$\frac{n!}{(n-r)!}$	n^r
NO IMPORTA EL ORDEN	$\binom{n}{r}$	$\binom{n+r-1}{r}$

1 - 6 - 21 - 29 - 33 -43

La primitiva. Se eligen 6 números distintos del 1 al 49, ambos inclusive.

- Probabilidad de acertar los 6.
- Probabilidad de acertar 5.
- Probabilidad de acertar 4.
- Probabilidad de no acertar ninguno.
- Probabilidad de que salga un número concreto, por ejemplo el número 1.

Primitiva

$$P(\text{Acertar 6}) = \frac{1}{\binom{49}{6}} = \frac{1}{13.983.816} = 0{,}000000072$$

$$P(\text{Acertar 5}) = \frac{\binom{6}{5}\times\binom{43}{1}}{\binom{49}{6}} = \frac{258}{13.983.816} = 0{,}000018$$

$$P(\text{Acertar 4}) = \frac{\binom{6}{4}\times\binom{43}{2}}{\binom{49}{6}} = \frac{13.545}{13.983.816} = 0{,}00097$$

$$P(\text{Ninguno}) = \frac{\binom{43}{6}}{\binom{49}{6}} = \frac{6.096.454}{13.983.816} = 0{,}44$$

$$P(\text{Salga el 1}) = \frac{\binom{48}{5}}{\binom{49}{6}} = \frac{6}{49} = 0{,}1224$$

- En una estación de metro hay 5 pasajeros esperando a un tren con 10 vagones, si cada pasajero elige un vagón al azar, ¿cuál es la probabilidad de que todos elijan un vagón diferente?

$$P(A)=\frac{N(A)}{N}=\frac{10\times 9\times 8\times 7\times 6}{10^5}=0.3024$$

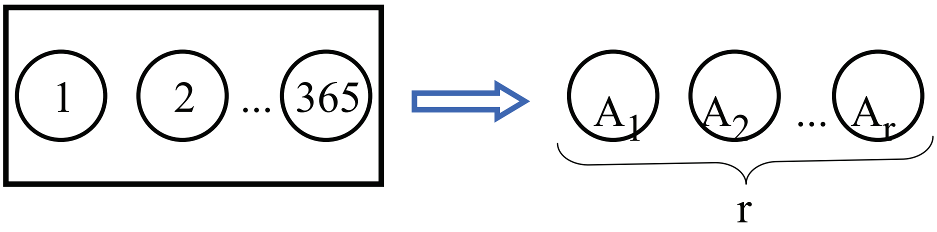
- De un lote con 100 piezas se toman al azar 10, si todas las piezas elegidas son buenas se acepta el lote y se rechaza en caso contrario. ¿Cuál es la probabilidad de aceptar un lote con 10 piezas defectuosas?

$$N=\binom{100}{10}=\frac{100!}{10!\,90!};\quad N(A)=\binom{90}{10}=\frac{90!}{80!\,10!}$$

$$P(A)=\frac{N(A)}{N}=\frac{90!}{80!}\frac{90!}{100!}=\frac{90\times 89\times\cdots\times 81}{100\times 99\times\cdots\times 91}=0.330$$

Cumpleaños

Probabilidad de que en un grupo de *r = 25* personas haya al menos dos con el mismo cumpleaños.



$$A=\text{" No haya ninguna coincidencia"}$$

$$P(A)=\frac{365\times(365\text{ - }1)\times\cdots\times(365-r+1)}{365^r}$$

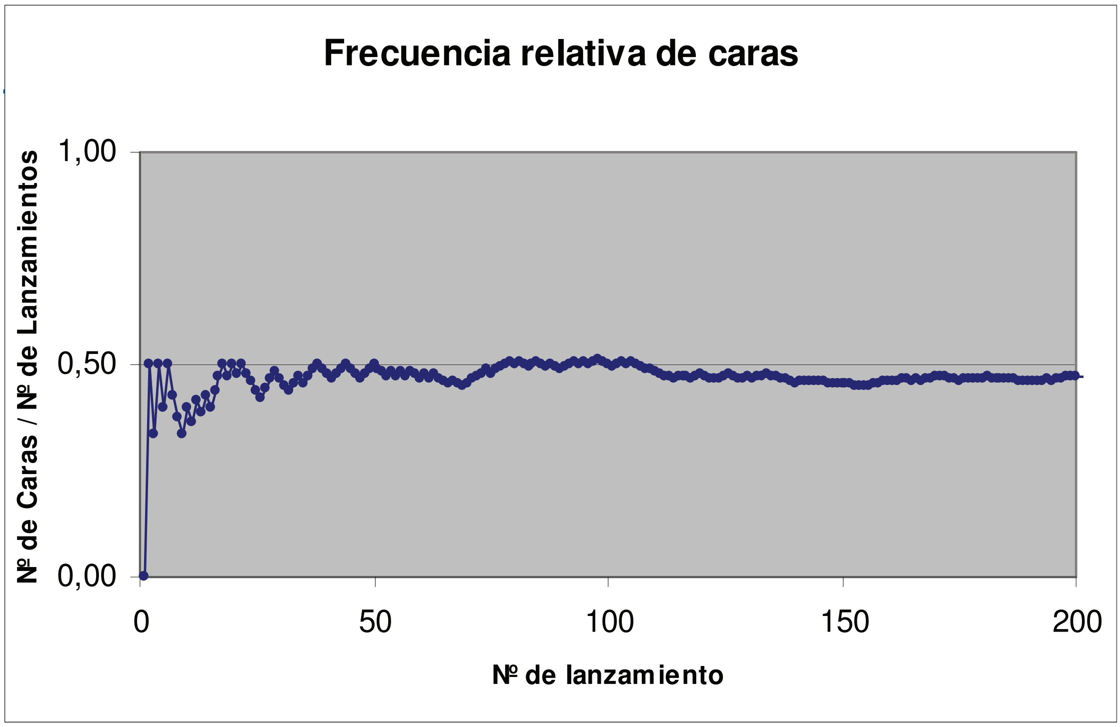
$$P(\overline{A})\ =\ 1\text{ - }P(A),\qquad r=25\rightarrow P(\overline{A})\ =0.578$$

Probabilidad y Frecuencia Relativa

La probabilidad *P(A)* de un suceso *A* es el límite

$$\boxed{P(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{n_A}{n}}$$

dónde n_A es el número de veces que ha ocurrido *A* al repetir el experimento *n* veces en idénticas condiciones.



La Primitiva

APARICIONES DE LOS NUMEROS
EN LA COMBINACIÓN GANADORA

Nº	TOTAL	2000	2001	Nº	TOTAL	2000	2001
1	171	9	6	2	154	11	11
3	173	13	7	4	164	17	8
5	169	12	4	6	191	10	12
7	166	11	6	8	159	9	6
9	173	20	10	10	166	19	11
11	164	17	6	12	166	8	12
13	165	9	12	14	182	14	8
15	179	15	16	16	167	7	1
17	170	11	15	18	161	14	14
19	168	14	10	20	152	10	9
21	169	13	6	22	176	16	7
23	188	11	10	24	149	13	7

Total sorteos **1.380** (2000 - 104; 2001 - 74)

La Primitiva

APARICIONES DE LOS NUMEROS
EN LA COMBINACIÓN GANADORA

Nº	TOTAL	2000	2001	Nº	TOTAL	2000	2001
25	177	14	7	26	165	10	3
27	169	14	16	28	156	14	10
29	169	10	10	30	173	13	12
31	161	12	8	32	160	15	7
33	162	6	11	34	173	16	16
35	174	12	7	36	178	18	7
37	165	13	8	38	193	12	10
39	190	16	9	40	168	8	9
41	175	11	8	42	163	12	10
43	158	9	10	44	163	15	11
45	182	13	9	46	157	15	7
47	190	19	6	48	166	15	8
49	151	9	11				

NO INCLUYE LA APARICION DEL NUMERO COMPLEMENTARIO

Probabilidad Condicionada

	Mujeres (M)	Hombres (H)	**TOTAL**
Fumadores (F)	0,12	0,18	**0,30**
No Fumadores (N)	0,39	0,31	**0,70**
TOTAL	**0,51**	**0,49**	**1,00**

$$P(F) = 0{,}30 \quad \begin{cases} P(F \mid H) = \dfrac{0{,}18}{0{,}45} = 0{,}40 \\ \\ P(F \mid M) = \dfrac{0{,}12}{0{,}55} = 0{,}22 \end{cases}$$

Probabilidad Condicionada

Definición. Sea *B* un suceso con probabilidad distinta de cero, se define probabilidad del suceso *A* dado *B* a:

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Utilidad

- Actualizar probabilidad del suceso *A* en función de la información disponible *I*

$$P(A|I) = P(A \cap I)/P(I)$$

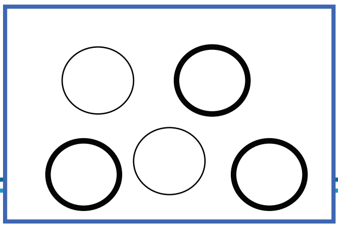
- Cálculo de la intersección de sucesos

$$P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$$

- Cálculo de probabilidad de un suceso

$$\begin{aligned} P(A) &= P((A \cap B) \cup (A \cap \overline{B})) \\ &= P(A \mid B)P(B) + P(A \mid \overline{B})P(\overline{B}) \end{aligned}$$

Ejemplo Urna



Probabilidad de “1ª Blanca y 2ª Negra”

- **Sin reemplazamiento**:

$$P(B1 \cap N2) = P(B1)\ P(N2|\ B1)$$

$$= (3/5)(2/4) = 3/10$$

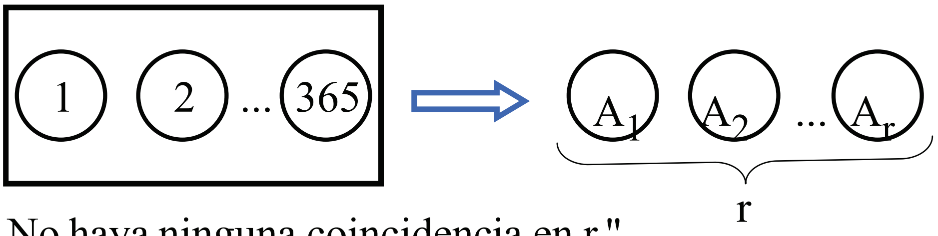
- **Con reemplazamiento**:

$$P(B1 \cap N2) = P(B1)\ P(N2|\ B1)$$

$$= (3/5)(2/5) = 6/25$$

Cumpleaños

Probabilidad de que en un grupo de *r = 25* personas haya al menos dos con el mismo cumpleaños.



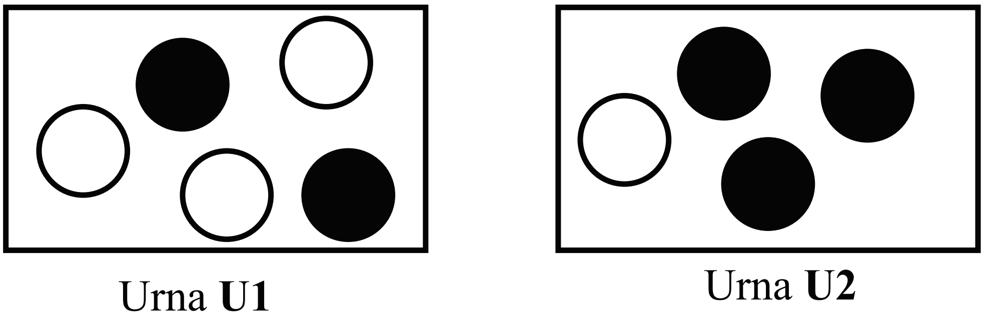
$$B_r = \text{" No haya ninguna coincidencia en r "}$$

$$P(B_r) = P(B_1)P(B_2 \mid A_1)P(B_3 \mid A_1 \neq A_2)\cdots P(B_r \mid A_1 \neq A_2 \neq \cdots \neq A_{r-1})$$

$$= 1 \times \frac{365-1}{365} \times \frac{365-2}{365} \times \cdots \times \frac{365-r+1}{365}$$

$$P(\overline{B_r}) = 1 - P(B_r), \qquad r = 25 \rightarrow P(\overline{B_r}) = 0.578$$

Ejemplo

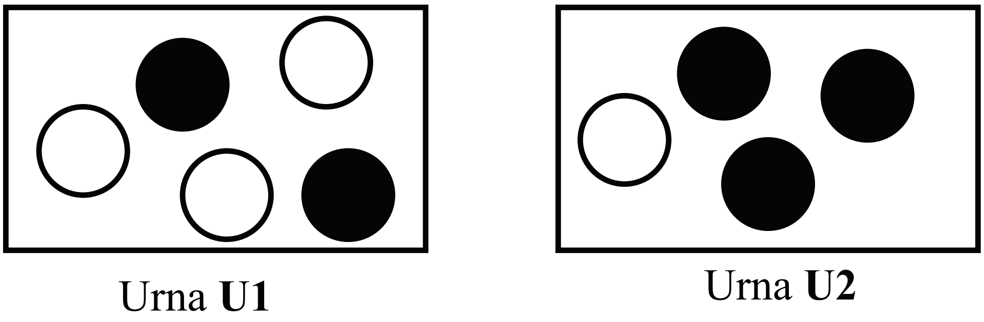


Se elige una urna al azar y se extrae una bola: ¿ P(Blanca) ?

$$P(B) = P(B \mid U1)P(U1) + P(B \mid U2)P(U2)$$

$$= \frac{3}{5} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} = \frac{17}{40} = 0.425$$

Ejemplo (cont.)



Se toma al azar una bola de U1 y se mete en U2. Se extrae una bola de U2: ¿ P(Blanca) ?

$$P(B) = P(B \mid B1)P(B1) + P(B \mid N1)P(N1)$$

$$= \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{8}{25} = 0.32$$

Independencia

Si el conocimiento de la ocurrencia de un suceso *B* cambia la probabilidad de que ocurra otro *A*, se dice que *A* y *B* son **dependientes**, en ese caso $P(A|B) \neq P(A)$.

Cuando el suceso *A* es independiente de *B*, la ocurrencia de *B* no cambia la probabilidad de *A*, es decir $P(A|B) = P(A)$.

Como $P(A|B) = P(A \cap B)/P(B)$,

***A* y *B* son independientes** $\Leftrightarrow$ $P(A \cap B) = P(A)\, P(B)$

Lanzamiento de dos monedas

S = {CC, CX, XC,XX}

Hipótesis:

- Monedas equilibradas: P(C) = P(X)
- Independientes

P (CC) = P(C) P(C) = (1/2)×(1/2) = 1/4

P (CX) = P(C) P(X) = (1/2)×(1/2) = 1/4

P (XC) = P(X) P(C) = (1/2)×(1/2) = 1/4

P (XX) = P(X) P(X) = (1/2)×(1/2) = 1/4

Independencia (3 o más sucesos)

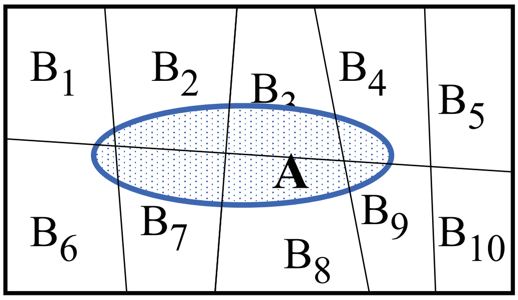
- Tres sucesos *A, B* y *C* son independientes si

$$\begin{cases} \bullet P(A \cap B \cap C) = P(A)\, P(B)\, P(C) \\ \bullet P(A \cap B) = P(A)\, P(B) \\ \bullet P(A \cap C) = P(A)\, P(C) \\ \bullet P(B \cap C) = P(B)\, P(C) \end{cases}$$

- Los sucesos $A_1, A_2, \ldots, A_n$ son independientes si cualquier subconjunto $A_{i1}, A_{i2}, \ldots, A_{ik}$, cumple

$$P(A_{i1} \cap A_{i2} \cap \ldots \cap A_{ik}) = P(A_{i1}) P(A_{i2}) \ldots P(A_{ik})$$

Probabilidad Total



Partición.

$$B_1, B_2, \ldots, B_n : \quad B_j \subset S$$

$$B_i \cap B_j = \varnothing, \quad \forall i \neq j$$

$$B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n = S$$

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \cap S) \\ &= P\left[A \cap (B_1 \cup B_2 \cup \cdots \cup B_n)\right] \\ &= P\left[(A \cap B_1) \cup (A \cap B_2) \cup \cdots \cup (A \cap B_n)\right] \\ &= P(A \cap B_1) + P(A \cap B_2) + \cdots + P(A \cap B_n) \end{aligned}$$

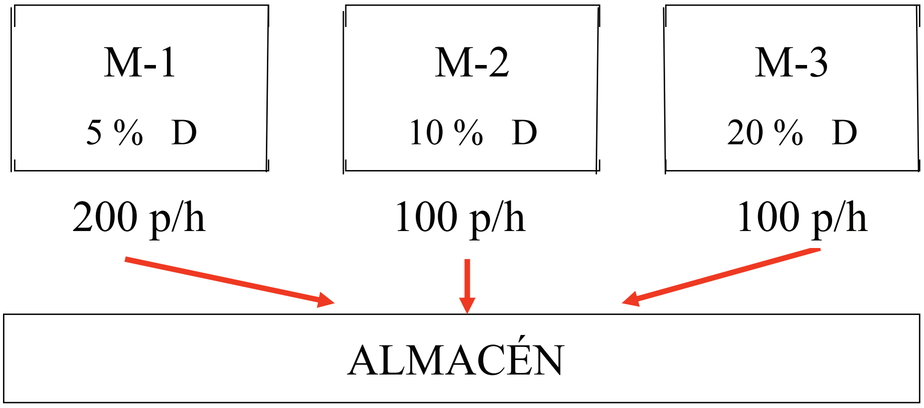
$$\boxed{P(A) = P(A \mid B_1)P(B_1) + P(A \mid B_2)P(B_2) + \cdots P(A \mid B_n)P(B_n)}$$

Teorema de Bayes

Sea $B_1, B_2, \ldots, B_n$ una partición del espacio S tal que $P(B_j) > 0$, para $j = 1,2,\ldots,n$ y sea A cualquier suceso con $P(A) > 0$, entonces para cualquier B_i :

$$\boxed{P(B_i|A) = \frac{P(A|B_i)P(B_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(A|B_j)P(B_j)}.}$$

Ejemplo (Bayes)



El porcentaje de piezas defectuosas fabricadas por tres máquinas es 5%, 10% y 20%. La primera fabrica 200 piezas por hora y las otras dos 100 piezas por hora. Todas las piezas fabricadas se llevan a un almacén. Al final del día se toma una pieza del almacén y es defectuosa, ¿cuál es la probabilidad de que proceda de M-1?

$$P(M_1 \mid D) = \frac{P(D \mid M_1)P(M_1)}{P(D \mid M_1)P(M_1) + P(D \mid M_2)P(M_2) + P(D \mid M_3)P(M_3)}$$
$$= \frac{0.05 \times 0.5}{0.05 \times 0.5 + 0.20 \times 0.25 + 0.10 \times 0.25} = 0.25$$

$$P(M_2 \mid D) = \frac{P(D \mid M_2)P(M_2)}{P(D \mid M_1)P(M_1) + P(D \mid M_2)P(M_2) + P(D \mid M_3)P(M_3)}$$
$$= \frac{0.20 \times 0.25}{0.05 \times 0.5 + 0.20 \times 0.25 + 0.10 \times 0.25} = 0.50$$

$$P(M_3 \mid D) = \frac{P(D \mid M_3)P(M_3)}{P(D \mid M_1)P(M_1) + P(D \mid M_2)P(M_2) + P(D \mid M_3)P(M_3)}$$
$$= \frac{0.10 \times 0.25}{0.05 \times 0.5 + 0.20 \times 0.25 + 0.10 \times 0.25} = 0.25$$

$$P(M_1 \mid D) + P(M_2 \mid D) + P(M_3 \mid D) = 1$$

Si una persona es portadora del virus A, un análisis de sangre lo detecta el 99% de las veces. Sin embargo, el test también proporciona *"falsos positivos"*, indicando la presencia del virus en el 3% de personas sanas. Si sólo 5 de cada 1000 personas tienen el virus, ¿cuál es la probabilidad de que una persona tenga el virus realmente si el análisis ha dado positivo?

$$V = \text{"Tener el Virus"} \qquad S = \text{"El análisis es positivo"}$$

$$P(V \mid S) = \frac{P(V \cap S)}{P(S)} = \frac{P(S \mid V)P(V)}{P(S \mid V)P(V) + P(S \mid \bar{V})P(\bar{V})}$$

$$= \frac{0.99 \times 0.005}{0.99 \times 0.005 + 0.03 \times 0.995} = 0.142$$

Ejemplo Virus

(Aplicado a 1.000.000 personas)

	SANOS	ENFERMOS	Total
NEGATIVO	965.150	50	965.200
POSITIVO	29.850	4.950	34.800
Total	995.000	5.000	1.000.000

Entre los **34.800** que han dado positivo, sólo **4.950** tienen el virus

P(V|S) = 4.950/34.800 = 0.142

2. 2 Variable aleatoria

Experimento Aleatorio

EL término "**experimento aleatorio**" se utiliza en la teoría de la probabilidad para referirse a un proceso cuyo resultado no es conocido de antemano con certeza.

"Suma de valores en el lanzamiento de 2 dados."

Variable Aleatoria

Una **variable aleatoria** es una función que asigna un número real a cada uno de los resultados de un experimento aleatorio.

Lanzamiento de 2 monedas

$X(s) \equiv$ Número de CARAS

s	$X(s)$
CC	$\rightarrow$ 2
CX	$\rightarrow$ 1
XC	$\rightarrow$ 1
XX	$\rightarrow$ 0

Variable Aleatoria Discreta

Cuando los valores que toma una variable aleatoria son *finitos o infinitos numerables* se dice que es **discreta**.

- Resultado obtenido al lanzar un dado
  {1,2,3,4,5,6}
- Número de veces que hay que lanzar una moneda hasta obtener una CARA
  {1,2,3,4, ...}

Distribución de probabilidad

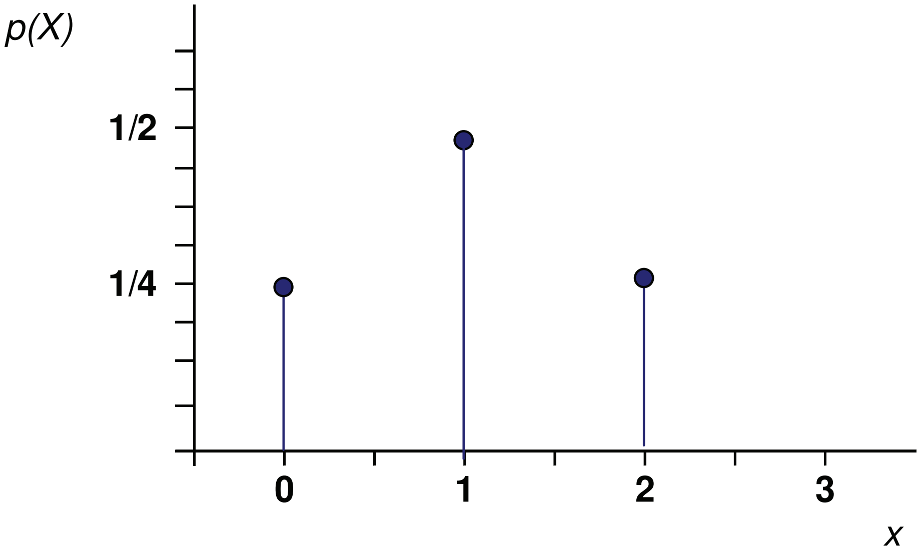
Sea { x_1 , x_2 , ..., x_n } los valores que puede tomar la variable aleatoria *X*. Se denomina **distribución de probabilidad** de la variable aleatoria a $P(X=x_i)$ que cumple:

- $P (X = x_i) \geq 0$
- $\Sigma_{i=1} P (X = x_i) = 1.$

Nº de Caras al lanzar 2 monedas

x *P(X=x)*
0 → 1/4
1 → 1/2
2 → 1/4

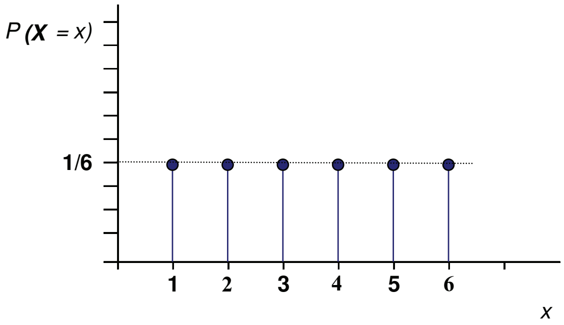
Distribución de probabilidad



Nº de Caras al lanzar 2 monedas

Lanzamiento de un dado

x	$P(X = x)$
1	$1/6$
2	$1/6$
3	$1/6$
4	$1/6$
5	$1/6$
6	$1/6$



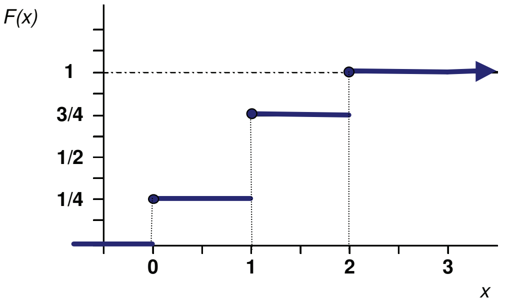
Función de distribución

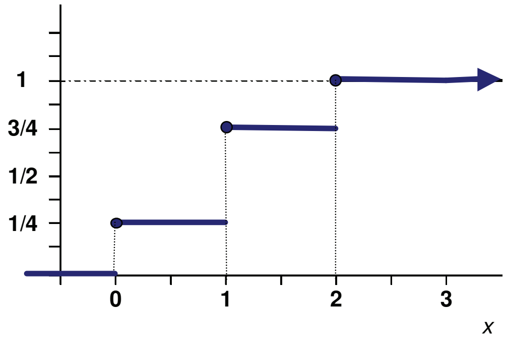
La función de distribución $F_X(x)$ de una variable aleatoria X se define para todo número real x como:

$$F_X(x) = P_X(X \leq x).$$

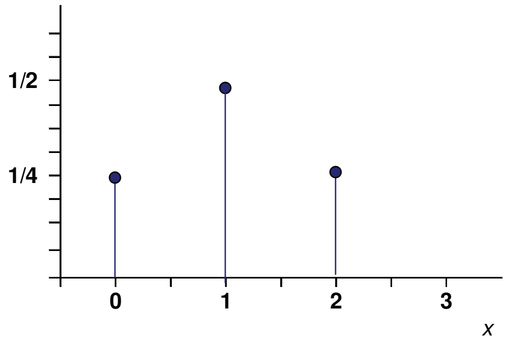
Ejemplo. X = Número de caras al lanzar 2 monedas

x	$F_X(x)$
(-∞,0)	0
[0,1)	1/4
[1,2)	3/4
[2,∞)	1



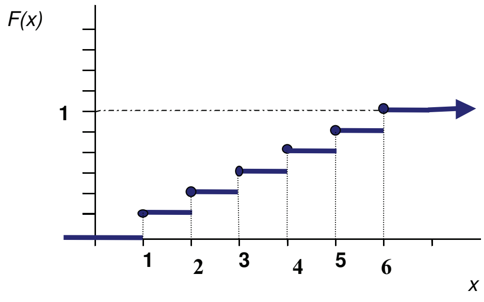


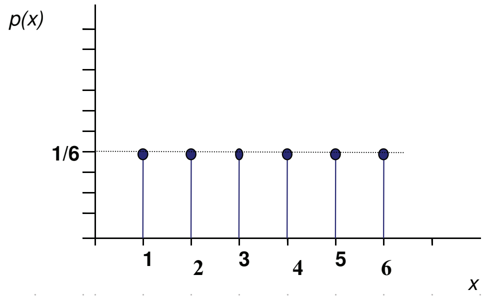
Función de Distribución



Distribución puntual de probabilidad

Lanzamiento de un dado





x	$P(X = x)$
1	$1/6$
2	$1/6$
3	$1/6$
4	$1/6$
5	$1/6$
6	$1/6$

Una función F(x) es una **función de distribución** si y sólo si cumple las siguientes condiciones:

a. $\lim_{x\to-\infty} F(x) = 0$ y $\lim_{x\to+\infty} F(x) = 1.$

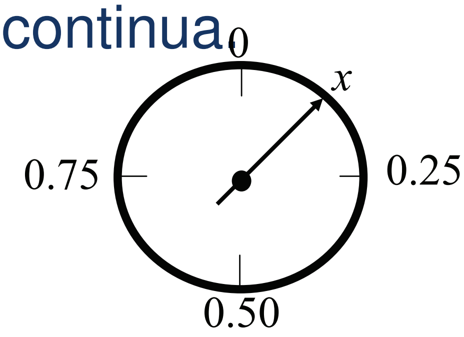
b. $F(x)$ es una función no decreciente.

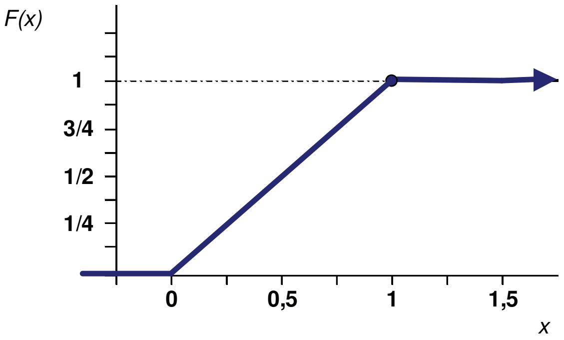
c. $F(x)$ es continua por la derecha :

$$\forall h > 0, \quad \lim_{h\to 0} F(x+h) = F(x).$$

Variable aleatoria continua

Una variable aleatoria *X* es continua si su función de distribución $F_X(x)$ es continua.





$$F_X(x) = x, \quad x \in [0,1)$$

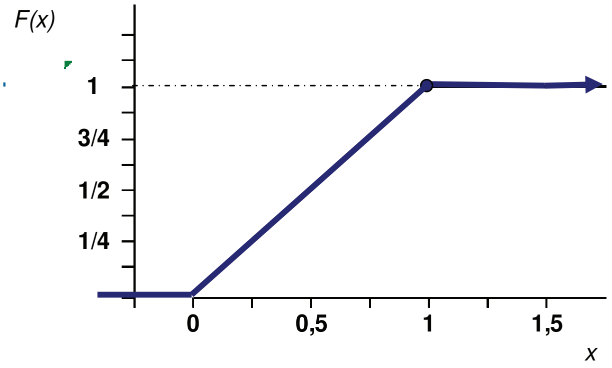
Función de densidad

La **función de densidad** de probabilidad $f_X(x)$ de una variable aleatoria continua X es la función que verifica

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)\,dt, \quad \forall\, x.$$

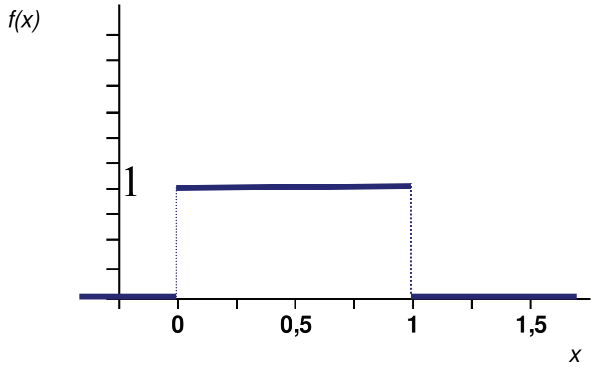
Si $F_X(x)$ es derivable, además

$$\frac{d}{dx} F_X(x) = f_X(x).$$



Función de distribución

$F_X(x) = x,\ \ x\in[0,1)$



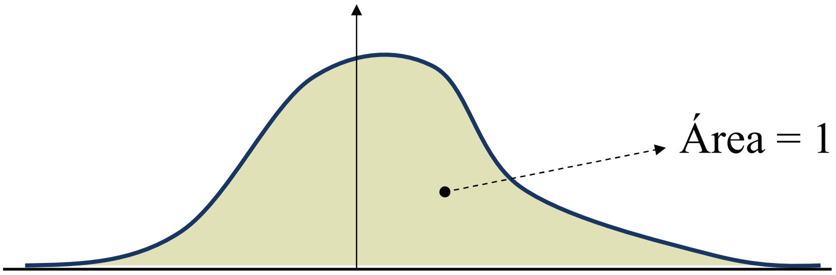
Función de densidad

$f_X(x) = 1,\ \ x\in[0,1]$

Una función $f_X(x)$ es una **función de densidad** de probabilidad de una variable aleatoria X si y sólo si cumple:

a. $f_X(x) \geq 0$ para todo x.

b. $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\, dx = 1.$



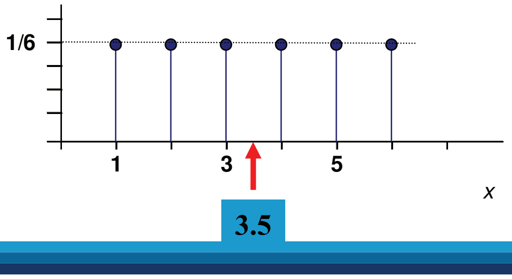
Esperanza

Se define **esperanza** o **media** de una variable aleatoria discreta X y se representa por $E[X]$ al valor

$$\boxed{E[X] = \sum_{i=1}^{n} x_i P(X = x_i).}$$

Ejemplo: Lanzamiento de un dado

$$E[X] = 1\times\frac{1}{6} + 2\times\frac{1}{6} + 3\times\frac{1}{6} + 4\times\frac{1}{6} + 5\times\frac{1}{6} + 6\times\frac{1}{6} = 3.5$$



Centro de la distribución de probabilidad

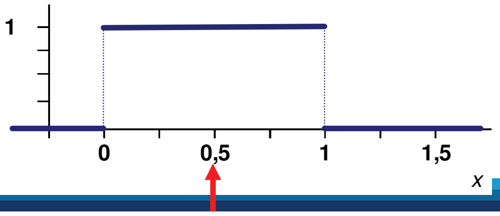
Esperanza

Se define **esperanza** o **media** de una variable aleatoria continua *X* con función de densidad $f_X(x)$ y se representa por $E[X]$ al valor

$$\boxed{E[X]=\int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, dx.}$$

$$\text{Ejemplo : Distribución uniforme } f_X(x)=1,\ 0\le x\le 1$$

$$E[X]=\int_0^1 x\times 1\, dx=\left.\frac{x^2}{2}\right|_0^1=\frac{1}{2}.$$



Centro de la distribución de probabilidad

Propiedades de E[X]

- Transformaciones lineales Y = a X+b (a y b constantes)

$$E[aX+b]=aE[X]+b$$

Varianza

Sea *X* una variable aleatoria con media μ, se denomina **varianza** a

$$\mathrm{Var}\,(X) = \mathrm{E}[\,(X - \mu)^2\,].$$

- Variable aleatoria discreta

$$Var[X] = \sum_{x=-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 P(X = x).$$

- Variable aleatoria continua

$$Var[X] = \int_{-\infty}^{\infty} (x-\mu)^2 f_X(x)\, dx$$

Propiedades de la varianza

1. $Var(X) = E[(X-\mu)^2]$
   $= E[X^2] - \mu^2.$

2. $Var(aX+b) = a^2 Var(X)$

Ejemplos

Lanzamiento de un dado

$$Var[X] = (1^2 \times \frac{1}{6} + 2^2 \times \frac{1}{6} + 3^2 \times \frac{1}{6} + 4^2 \times \frac{1}{6} + 5^2 \times \frac{1}{6} + 6^2 \times \frac{1}{6}) - (3.5)^2$$

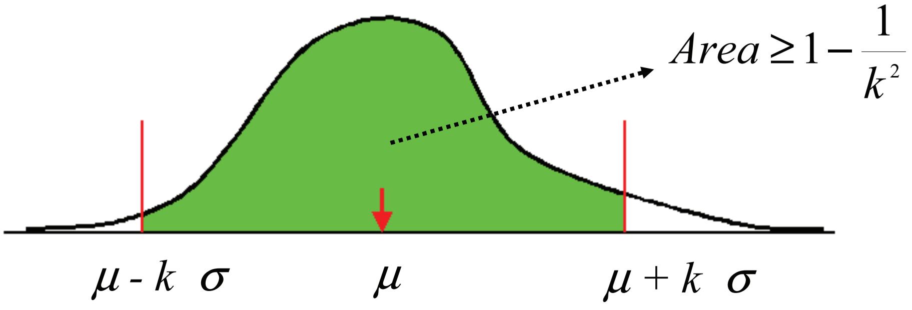
$$= \frac{35}{12}.$$

Distribución uniforme

$$\mathrm{Var[X]} = \int_0^1 x^2 \times 1 dx - (1/2)^2$$

$$= \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^1 - \frac{1}{4} = \frac{1}{12}.$$

Desigualdad de Tchebychev



Para cualquier variable aleatoria

$$\mu = E[X] \qquad \sigma^2 = Var[X]$$

$$P(|X - \mu| \leq k\sigma) > 1 - \frac{1}{k^2}.$$

Momentos de una V.A.

Momentos respecto al Origen

$$\mu_1 = E[X] = \mu$$

$$\mu_2 = E[X^2]$$

$$\ldots$$

$$\mu_p = E[X^p]$$

Momentos respecto a la media

$$\alpha_1 = E[(X-\mu)] = 0$$

$$\alpha_2 = E[(X-\mu)^2] = \sigma^2$$

$$\ldots$$

$$\alpha_p = E[(X-\mu)^p]$$

Transformaciones no lineales
z=h(y)

Desarrollo de Taylor para $z = h(y)$ en $\mu = \mathrm{E[y]}$

$$z \approx h(\mu) + h'(\mu)(y-\mu) + \frac{1}{2}h''(\mu)(y-\mu)^2$$

La media y varianzas de z son aprox.

$$E[z] \approx h(\mu) + \frac{1}{2}h''(\mu)\mathrm{Var}(y)$$

$$\mathrm{Var}[z] \approx [h'(\mu)]^2\,\mathrm{Var}[y]$$

Transformaciones

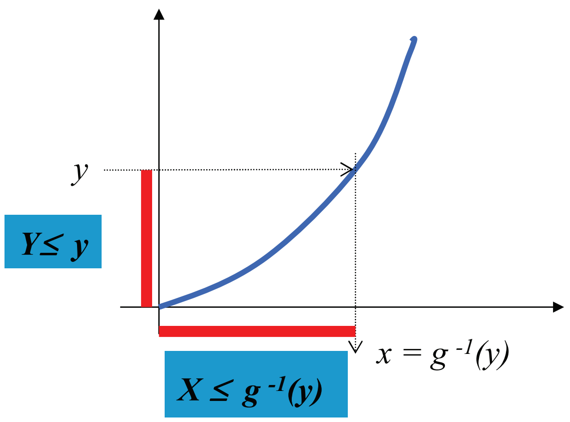
Dada una variable aleatoria X con función de densidad $f_X(x)$ vamos a ver como se obtiene la función de densidad $f_Y(y)$ de la variable aleatoria Y, definida como

$$Y = g(X)$$

Casos a considerar :

- La función g es monótona creciente
- La función g es monótona decreciente
- La función g no es monótona

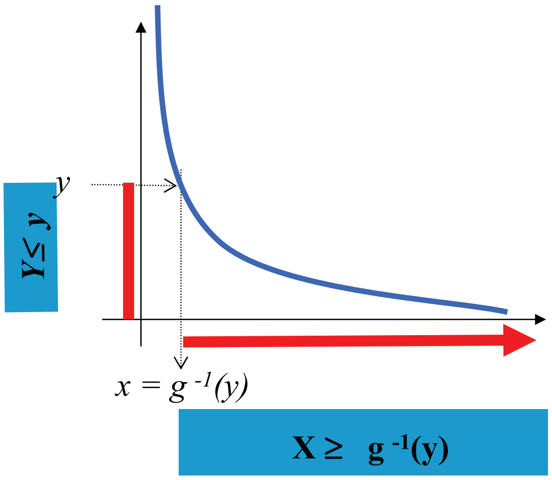
Función *g* creciente



$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \le y) \\ &= P(g(X) \le y) \\ &= P(\, X \le g^{-1}(y)\,) \\ &= F_X(g^{-1}(y)) \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} f_Y(y) &= \frac{dF_Y(y)}{dy} \\ &= \frac{d\,g^{-1}(y)}{dy} \times f_X(g^{-1}(y)) \end{aligned}}$$

Función *g* decreciente



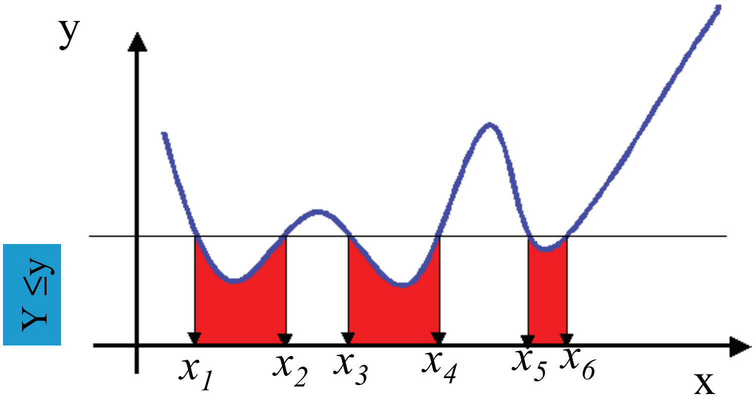
$$
\begin{aligned}
F_Y(y) &= P(Y \leq y) \\
&= P(g(X) \leq y) \\
&= P(\, X \geq g^{-1}(y)\,) \\
&= 1 - F_X(g^{-1}(y))
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\begin{aligned}
f_Y(y) &= \frac{dF_Y(y)}{dy} \\
&= -\frac{d\, g^{-1}(y)}{dy} \times f_X(g^{-1}(y))
\end{aligned}}
$$

Función monótona

$$
f_Y(y) = \left| \frac{d\, g^{-1}(y)}{dy} \right| \times f_X(g^{-1}(y))
$$

Transformación no monótona



$$F_Y(y) = P(Y \leq y)$$
$$= P(x_1 \leq X \leq x_2) + P(x_3 \leq X \leq x_4) + P(x_5 \leq X \leq x_6)$$

Ejemplo de transformación

El radio de una esfera es una variable aleatoria cuya función de densidad es

$$f_X(x) = 3x^2, \quad 0 \leq x \leq 1.$$

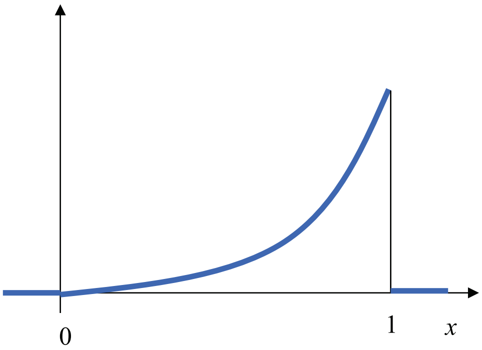
¿Cuál es la función de densidad del volumen?

$$Y = \text{Volumen de la esfera}$$

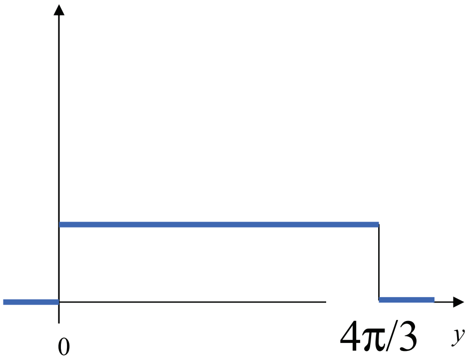
$$Y = \frac{4}{3}\pi X^3 \Rightarrow X = \left(\frac{3Y}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$$

$$g(x) = \frac{4}{3}\pi x^3; \Rightarrow g^{-1}(y) = \left(\frac{3y}{4\pi}\right)^{\frac{1}{3}};$$

$$f_Y(y) = \left|\frac{d}{dy} g^{-1}(y)\right| \times f_X(g^{-1}(y))$$
$$= \frac{3}{4\pi}, \quad 0 \leq y \leq \frac{4\pi}{3}.$$



$$f_X(x) = 3x^2, \quad 0 \le x \le 1.$$



$$f_Y(y) = \frac{3}{4\pi}, \quad 0 \le y \le \frac{4\pi}{3}.$$

$$y = \frac{4}{3}\pi x^3$$

Un caso muy relevante del problema inverso

Dadas:

1) Una variable aleatoria *x* con distribución uniforme *(0,1)*

2) Una variable aleatoria *y* con función de densidad $f_Y(y)$

Encontrar la transformación *y=g(x)* que convierte *x* en *y*

Solución del problema

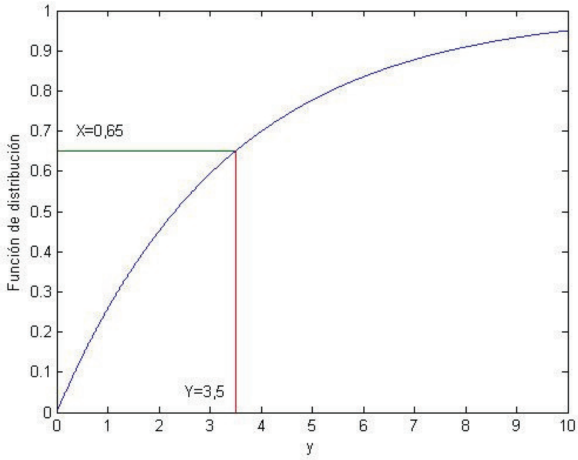
$$\frac{d\, g^{-1}(y)}{dy} = f_Y(y)$$

$$g(x) = F_y^{-1}(x)$$

Representación gráfica con ejemplo

$$f_Y(y) = \lambda e^{-\lambda y}, \lambda = 0,3$$

$$X = 0,65, y = -(1/\lambda)\log(1-x) = 3,5$$



Aplicación: Simulación de Monte Carlo

Simulación con ordenador de procesos aleatorios; tiene dos vertientes:

1) Pedagógica: como herramienta para entender mejor los modelos de probabilidad

2) Computacional: herramienta muy potente para resolver problemas no abordables por métodos convencionales

---

Ejemplo de problema resuelto por simulación de Monte Carlo

Problema de los cumpleaños:

1) Se generan al azar con distribución uniforme discreta en 1,2,..,365, r valores (fechas de nacimiento de las r personas)

2) Se cuenta el número de coincidencias

3) Repitiendo N veces los pasos 1 y 2, se obtiene una aproximación de la distribución del número de coincidencias

Ejercicios propuestos

Capítulo 2. Probabilidad y variable aleatoria

2.1 Si la probabilidad de que un interruptor cualquiera de la figura se encuentre cerrado (es decir, pase corriente) es p, calcular la probabilidad de que pase corriente de A a B para las dos configuraciones siguientes:

2.2 Teniendo en cuenta que para cualquier par de sucesos, A_1, A_2 se cumple que

$$\Pr(A_1A_2) \geq \Pr(A_1) + \Pr(A_2) - 1,$$

demostrar que la extensión a n sucesos es $\Pr(A_1A_2...A_n) \geq \sum_{i=1}^{n} \Pr(A_\imath) - (n-1)$.

2.3 La probabilidad de que un componente de una máquina se averíe antes de 100 horas es 0.01. La máquina tiene 50 componentes; calcular la probabilidad de averís de la máquina antes de 100 horas en los casos siguientes:

(a) La máquina se avería cuando lo hace uno o más componentes.
(b) La máquina se avería cuando fallan dos o más componentes.
(c) La máquina sólo se avería cuando lo hacen todos los componentes.

2.4 Sean A y B dos sucesos no disjuntos cualesquiera de un experimento aleatorio. Indicar cual de las siguientes probabilidades es mayor $P_1 = P(AB \mid A)$ ó $P_2 = P(AB \mid A \cup B)$. Justificar la respuesta.

2.5 Dado dos sucesos A y B, tal que $P(A) > 0$ y $P(B) > 0$ indicar, justificando la respuesta, si son ciertas o no las afirmaciones siguientes:

(a) Si A y B son sucesos mutuamente excluyentes entonces no pueden ser independientes.
(b) Si A y B son independientes entonces no pueden ser mutuamente excluyentes.

2.6 Dos pueblos de alta montaña están comunicados por cuatro tramos de carretera según se muestra en la figura (a). Los días de invierno debido a la nieve es frecuente que las carreteras estén cortadas. Cuando nieva, la probabilidad de que cualquier tramo sea transitable es 0.8 con independencia de lo que ocurra con el resto. ¿Cuál es la probabilidad de que un vehículo pueda viajar de Villarriba a Villabajo un día con nieve? Para mejorar las comunicaciones se piensa construir un nuevo tramo de carretera entre los puntos A y B. Cuando nieva la probabilidad de accesibilidad es también 0.8 con independencia del resto. ¿Cuál es la probabilidad de que una persona pueda hacer el viaje anterior con esta nueva configuración (b)?

2.7 Un concursante debe elegir entre tres puertas, detrás de una de las cuales se encuentra un premio. Hecha la elección y antes de abrir la puerta, el presentador le muestra que en una de las dos puertas no escogidas está el premio y le da la posibilidad de reconsiderar su decisión. ¿Qué debe hacer el concursante?

2.8 Demostrar que si dos sucesos A y B son independientes, también los son A y $\overline{B}$, y $\overline{A}$ y $\overline{B}$, donde $\overline{A}$ y $\overline{B}$ representan los sucesos complementarios de A y B respectivamente.

2.9 Dos estudiantes A y B están matriculados en un curso. A asiste a las clases el 80% de los días y B el 60%, siendo las asistencias de ambos independientes. Si exactamente uno de los dos está en clase un día concreto, ¿cuál es la probabilidad de que sea A?

2.10 La probabilidad de que un componente se averíe en un período de tiempo dado es 0.01. Su estado (averiado o funcionando) se comprueba con un ensayo que cumple que cuando el componente funciona la probabilidad de que el ensayo diga lo contrario es 0.05, pero si el componente está averiado el ensayo no se equivoca. Si el ensayo indica que el componente está averiado, ¿cuál es la probabilidad de que realmente lo esté?

2.11 Cuatro fichas están marcadas con las letras A, B, C, ABC;se toma una de ellas al azar. Se pregunta si los tres sucesos consistentes en la presencia de la letra A, la letra B o la C sobre la ficha son o no independientes.

2.12 Tres personas comparten una oficina con un teléfono. De las llamadas que llegan, 2/5 son para A, 2/5 para B y 1/5 para C. El trabajo de estos hombres les obliga a frecuentes salidas, de manera que A está fuera el 50% de su tiempo, y B y C el 25%. Calcular la probabilidad de que :

(a) No esté ninguno para responder al teléfono.
(b) Esté la persona a la que se llama.
(c) Haya tres llamadas seguidas para una persona.
(d) Haya tres llamadas seguidas para tres personas diferentes.

2.13 En un campeonato de tenis usted tiene la opción de escoger la secuencia de partidos $A - B - A$ o la $B - A - B$, donde A y B indican sus oponentes. Para clasificarse debe usted ganar dos partidos consecutivos. El jugador A es mejor que el B. ¿ Qué secuencia será preferida?

2.14 Un jurado de tres miembros que decide por mayoría tiene dos miembros que deciden independientemente el veredicto correcto con probabilidad p y el tercero lanza una moneda. Si un juez tiene probabilidad p de acertar, ¿cuál de los dos sistemas tiene mayor probabilidad de acertar?

2.15 Una comunidad de vecinos ha contratado un sistema de alarma para evitar robos en sus hogares. En caso de robo la alarma se pone en funcionamiento con seguridad. La probabilidad de que se produzca un robo en el vecindario es 0.001. Existen además otras causas (viento, golpes bruscos, ...) que ponen en funcionamiento el sistema de alarma, la probabilidad de que en una noche se produzca una falsa alarma es 0.01. Si se declara una señal de alarma, ¿cuál es la probabilidad de que sea falsa?

2.16 Sea X una variable aleatoria con distribución uniforme en $(0, 1)$. Calcular la probabilidad de que $Y > 0.8$ si $Y = e^{-X^2}$.

2.17 Se elige un punto al azar interior a la circunferencia de ecuación $x^2 + y^2 = r^2$. Llamando Z a la variable aleatoria definida por la distancia entre el punto elegido y el centro de la circunferencia, calcular las funciones de densidad y distribución de Z.

2.18 Si X es una variable aleatoria con media μ. Demostrar que cuando $m = \mu$, $E[(X - m)^2]$ es mínima.

2.19 La función de densidad de la variable aleatoria X es

$$f(x) = \begin{cases} 1/(kx), & \text{si } 25 \leq x \leq 50 \\ 0, & \text{en el resto.} \end{cases}$$

Obtener k, la media y la varianza de X.

2.20 De acuerdo con la teoría cinética de los gases, la velocidad V de una molécula de masa m de un gas a la temperatura (absoluta) T es una variable aleatoria con la siguiente función de densidad:

$$f(v) = \frac{4}{\alpha^3\sqrt{\pi}} v^2 e^{-v^2/\alpha^2}, \quad v \geq 0$$

donde $\alpha = \sqrt{2kT/m}$, siendo k la constante de Boltzmann.
Además, $E(V) = 2\alpha/\sqrt{\pi}$ y $\mathrm{Var}(V) = (3/2 - 4/\pi)\alpha^2$.

(a) Calcular el valor medio de la energía cinética, $mV^2/2$, de una molécula. ¿ A una misma temperatura T, qué gas tiene mayor valor medio de energía cinética, uno ligero u otro más pesado?

(b) Obtener la función de densidad de la energía cinética de una molécula. Indicar si depende de la masa molecular.

2.21 La función de distribución de la variable aleatoria X es $F_X(x)$. Obtener la función de densidad de la variable aleatoria $Y = F(x)$.

2.22 Un modelo que habitualmente se utiliza en balística para comprobar la correcta calibración de las armas es

$$f(x) = \frac{x}{\sigma^2} \exp\left[-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right], \qquad x \geq 0, \sigma \geq 0,$$

donde la variable aleatoria X es la distancia del punto de impacto del proyectil al centro del blanco al que iba dirigido y σ es el parámetro que mide la precisión. Si para una distancia determinada de disparo la precisión del arma es $\sigma = 10$ cm, ¿cuál es la probabilidad de que al lanzar 10 proyectiles, ninguno haya impactado a una distacia menor de 5 cm del centro del blanco?

2.23 Adaptar la demostración de la desigualdad de Chebychev y demostrar la desigualdad de Markov

$$P(X > a) \leq \frac{1}{a} E\left[X\right]$$

donde X es una variable aleatoria positiva ($P(X > 0) = 1$)

2.24 La variable aleatoria Z tiene como función de densidad

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{z^2}{2\sigma^2}\right), \quad -\infty < z < \infty, \quad \sigma > 0$$

Obtener la función de densidad de

$$Y = |Z|$$

y su media.

2.25 Dada la variable aleatoria discreta X, cuya función de probabilidad viene definida por

$P(X = x) = kx$ con $x = 1, 2, ..., 20$

Calcular el valor de la constante y $E(X|X > 10)$.

2.26 Dada la variable aleatoria X, cuya función de densidad es

$$f(x) = \begin{cases} k(1 - x^2), & \text{si } 0 < x < 1 \\ 0, & \text{en el resto} \end{cases}$$

Obtener k, así como la media y la varianza de la variable $Y = 3X - 1$.

2.27 El diámetro D de las bolas de acero para un determinado tipo de rodamiento sigue una distribución de media μ y desviación típica σ. Obtener, de forma aproximada, la media y la varianza de la distribución de los volúmenes de estas bolas.

2.28 Si X es una variable aleatoria con distribución uniforme entre 0 y θ, obtener la función de densidad de la variable aleatoria $Y = +\sqrt{X}$.

2.29 Sea X una variable aleatoria discreta que toma los valores 1 y 2 con probabilidades $0,4$ y $0,6$ respectivamente. Si se extrae con reposición una muestra aleatoria simple de tamaño 2, obtener la función de probabilidad del promedio de las dos extracciones y relacionarla con resultados teóricos conocidos.